ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
93

For Senior & Graduate Courses

超弦理論の応用

物理諸分野でのAdS/CFT双対性の使い方

◆

夏梅 誠　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-93

超弦理論の応用

物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方

夏梅 誠 著

サイエンス社

まえがき

本書は，大学院生や他分野の研究者向けに書いた超弦理論の AdS/CFT 双対性の「応用」についの本である．

AdS/CFT は，ある意味，素粒子物理でもっとも活発に議論された考えだと言って差しつかえなだろう．素粒子物理学を中心とした論文のデータベース INSPIRE/SPIRES によると [1]，歴代論のなかでも AdS/CFT を提唱した論文 [2] が引用件数トップである．この論文は，2008 年には，準模型で CP 対称性の破れを説明した小林–益川論文を抑え 2 位に，2011 年には，標準模型の電理論を確立したワインバーグ論文を抑えてトップに躍り出た．

もともと AdS/CFT は超弦理論の考えなので，超弦理論の分野で盛んに議論されてきた．しかし，年は様相が変わってきており，素粒子論の枠を超えて一般相対論，原子核物理，物性物理，非平統計力学などの分野で議論されてきている．それは，AdS/CFT が「現実世界」を解析するうえ強力な手法になりつつあるからである．AdS/CFT は，5 次元の曲がった時空の解析によって，4 元の強結合ゲージ理論を解くことができると主張する．このため，実際に強結合ゲージ理論が登する原子核物理をはじめとした分野で盛んに議論されている．

このような AdS/CFT の応用では，超弦理論，一般相対論，原子核理論，物性理論，非平衡統計学といった多分野にわたる話が出てくる．そこで，本書では初学者でも学びやすいように，これの分野の基礎を含めて紹介する．また，このように多分野にわたる話では，わからない点があっもなかなか専門家に相談する機会も少ないかもしれない．そこで，初心者がつまずきやすいと思れる点をなるべく丁寧に議論するよう心がけた．一方，教科書というのは，それだけではなかな実際の研究に進むことができないのが常である．本書では，読者が AdS/CFT の研究を実践できよう，結果だけを紹介するのではなく，なるべく細かい計算も含め，また（ごく簡単とは言え）なべく進んだ話題，論文にもふれることにした．本書をもとに，もしもさまざまな分野の方々が新な AdS/CFT の応用をみつけることができれば幸いである．

執筆にあたり，草稿を読んで有益なコメントを寄せていただいた岡村隆さん（関西学院大学），中真さん（京都大学）に感謝します．また本書は，東北大学天文学教室，お茶の水女子大学素粒子研究室での集中講義がもとになっており，講義に参加していただいた方，講義を企画していただた方々（二間瀬敏史さん，菅本晶夫さん・曹基哲さん）にも感謝します．とくに，講義のわかりくい点や疑問点などを多く挙げていただいたお茶の水女子大学の大学院生のみなさん（大野慶子ん，小俣巴芳さん，齋藤麻由美さん，長岡友美さん，穂谷野訓子さん）に感謝します．最後に編部の平勢耕介さんには，長年にわたって SGC ライブラリへの執筆を勧めていただき，また実際執筆に際してもお世話になりました．感謝いたします．

2012 年 4 月

夏梅　誠

目　次

第 1 章
はじめに

1.1 AdS/CFT のあらまし

この章では，まず AdS/CFT の全体像を俯瞰したい．以下ではさまざまなキーワードが出てくるが，おいおい説明していくので，この段階ではこれらの用語をあまり気にする必要はない．

AdS/CFT 双対性は，もともと**超弦理論**の分野で出てきた考えである．自然界には，重力，電磁気力，弱い力，強い力の 4 つの相互作用がある．超弦理論は，これらの力を統一的にあらわす統一理論の最有力候補である（5 章）．

一般に**双対性** (duality) とは，表面上まったく異なってみえる 2 つの理論が等価だという考えである．超弦理論ではさまざまな双対性が存在し，超弦理論の全体像を理解するのに役立っている．一見違ってみえる 2 つの理論 A, B が等価でありうるのは，たとえば理論 B が弱結合のときに理論 A は強結合になっているせいである．理論 A が強結合なので，理論 A の弱結合での記述，基本的な自由度などが必ずしも適切ではなくなっている．AdS/CFT の場合も同じような構造になっている．

AdS/CFT 双対性の場合，大ざっぱに言って以下の同等性を主張する：

（4 次元時空の）強結合ゲージ理論 ＝ （5 次元の）AdS 時空

AdS/CFT は 4 次元の物理と 5 次元の物理が対応すると主張していることに注意してほしい．このような事情から，AdS/CFT はしばしば**ホログラフィック理論**とも呼ばれる．通常のホログラムが 2 次元面に 3 次元の映像を記録しているように，4 次元の理論で 5 次元の理論があらわされるからである．

右辺の AdS 時空は**反ド・ジッター時空** (anti-deSitter space) の略称である（6 章）．「AdS/CFT」の「AdS」は，この AdS 時空のことである．球は，正の定曲率をもつ空間である．同様に AdS 時空は，負の定曲率をもつ時空である．ド・ジッターはオランダの天文学者で，1917 年にアインシュタイン方程式

の解，ド・ジッター解をみつけた．これは正の定曲率をもつ時空である．反ド・ジッター時空は逆に負の定曲率をもつので，頭に「反」という言葉がついているのである．

左辺のゲージ理論は，重力以外の力，つまり電磁気力，弱い力，強い力を記述する．たとえば，電磁気力は $U(1)$ ゲージ理論，強い力をあらわす**量子色力学** (Quantum Chromodynamics) は $SU(3)$ ゲージ理論である（4.1 節）．重力以外の力の理論的基礎は，ゲージ理論としてよく理解されているが，ゲージ理論を強結合の場合に計算するのは困難である．このため，たとえば強い力が文字どおり強い状況下では，理論的な理解はなかなか進まない．AdS/CFT は，強結合のゲージ理論が曲がった時空を使って解析できると主張する．

双対性は，強結合の理論 A と弱結合の理論 B を対応づける．AdS/CFT の場合，たとえば理論 A がゲージ理論，理論 B が重力理論である．「重力理論が弱結合」という言い方はふつうしないが，弱結合の重力理論とは時空の曲率が小さいという意味である．ゲージ理論が強結合のときに，重力理論はこの性質を満たし，逆に上の意味で重力理論が強結合のときは，ゲージ理論は弱結合になっている．

より具体的には，AdS/CFT は両者の生成汎関数（分配関数）が一致すると主張する：

$$\boxed{Z_{\text{ゲージ}} = Z_{\text{AdS}}} \tag{1.1}$$

$Z_{\text{ゲージ}}$ はゲージ理論の生成汎関数，Z_{AdS} は重力理論の生成汎関数である．本書でやることは，この関係式がどういう意味をもち，この関係式からどういう量が計算できるかを議論することに尽きる．

有限温度のゲージ理論を議論することもできる．この場合，先の関係は

有限温度の強結合ゲージ理論 = AdS 時空中のブラックホール

に置きかわる．**ブラックホール**が出てくる基本的な理由は，ブラックホールも有限温度系だからである．**ホーキング放射**という現象により，ブラックホールは温度という概念をもつ（3 章）．本書では，基本的に**この有限温度の場合をあつかい，AdS/CFT による非平衡現象の解析を目的とする**．

ブラックホールを考えると，5 次元の重力理論と 4 次元の場の理論がなぜ対応しうるか，片鱗がうかがえる．有限温度系としてブラックホールもエントロピーをもつが，それが**ホライズン**（2 章）の「面積」に比例するという特徴をもっている（3 章）．一方，統計力学的なエントロピーは，系の「体積」に比例する．このことは，ブラックホールがかりに通常の場の理論であらわされるのなら，ブラックホールより次元が 1 次元低い場の理論でなければいけないことを示唆する．

ただし，AdS/CFT があつかうゲージ理論は，現実的な $SU(3)$ ゲージ理論などではなく，いくつかの点で違いがある．第一に，AdS/CFT では仮想的な $SU(N_c)$ ゲージ理論を考える．強結合のゲージ理論と言うのは，**ラージ $\boldsymbol{N_c}$ 極限**と呼ばれる場合のことである（4.2 節）．

第二に，AdS/CFT は典型的には超対称性をもつ**超対称ゲージ理論**と呼ばれる理論をあつかう．とくに，もっとも解析が容易なのは **$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論**と呼ばれる理論である（5.3.2 節）．$\mathcal{N}$ は，この理論のもつ超対称性の数をあらわす*1)．この理論には，次元をもったパラメータがないので，スケール対称性をもつ．さらに，この理論は，ポアンカレ対称性とスケール対称性をあわせもつ，より大きなコンフォーマル対称性をもつことが知られている．このような理論は，一般に**コンフォーマル場の理論** (conformal field theory)，略して CFT と呼ばれる．「AdS/CFT」の「CFT」は，この事情を指している．

ただし，ゲージ理論側が CFT なのは，もっとも簡単な AdS/CFT に限られる．AdS/CFT で議論されるゲージ理論・重力理論では，コンフォーマル対称性をもたない系の方がふつうである．たとえば，相転移が起こる系も知られているので（13 章），この場合明らかにスケール対称性はない．したがって，AdS/CFT という名前には語弊があり，歴史的な意味合いしかない*2)．式 (1.1) の左辺に違うゲージ理論をもってくると，それに応じて右辺も適切な時空を選ぶ必要がある（10.3 節）．しかし，典型的には無限遠方で AdS 時空に近づくような時空を考える．

このように，AdS/CFT であつかうゲージ理論は現実的な系とは言いがたい．しかし，このような欠点は AdS/CFT に特有なものではない．そもそも，場の理論ではしばしば強結合の問題に直面するが，解析的な手法や厳密に解けるモデルは少数しかない．しかし，そういった例が，場の理論に対する我々の直感を養うのに，事実上大きな役割を果たしてきた．たとえ限られた理論にしか適用できなくても，このような手法は貴重であり，場の理論に大きな進歩をもたら

---

*1) $\mathcal{N}$ は超対称性の数をあらわし，N_c は $SU(N_c)$ ゲージ理論の N_c（カラーの数）をあらわすことに注意．

*2) AdS/CFT という名前が不都合だということで，さまざまな代替案が提案されてきた．「ホログラフィック理論」もその一つである．ほかに有力なものとして「ゲージ・重力双対性」があったが，AdS/CFT が QCD に限らず場の理論全般に応用されるようになって，この名前も具合が悪くなってきた．そこで，「バルク／境界双対性」や「場の理論・重力双対性」という言い回しもよく見かける．また，American Institute of Physics による PACS (Physics and Astronomy Classification Scheme) コードでは「ゲージ／ストリング双対性」という名称が採用されている．おいおいみていくように，ゲージ理論の双対理論は本当は超弦理論なので，この名称も適切ではある．いずれにせよ，名前は違っていても，どれも基本的には同じである．AdS/CFT の応用がどこまで広がるか読めない現時点では，むやみに名前を作らず，もとの AdS/CFT を使い続けた方が無難だと思うので，本書では一貫して AdS/CFT と呼ぶことにする．余談だが，AdS/CFT は名前に悩まされてきた．もともとは，AdS/CFT の提唱者の名前を使って「Maldacena 予想」と呼ばれた．しかし，双対性はほとんどの場合証明できるものではなく，まず予想として出発するのが常なので，この言い方も廃れた．

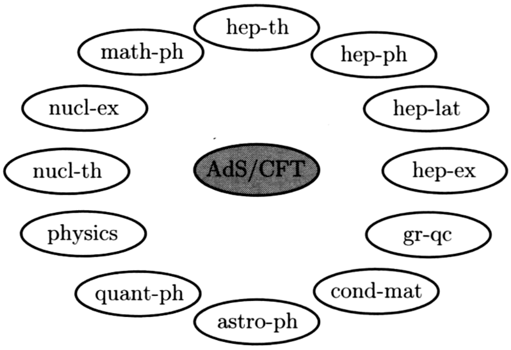


図 1.1　アーカイブにまたがる AdS/CFT 双対性.

してきた．AdS/CFT 双対性も，そういった手法の一つと考えることができる．

1.2　AdS/CFT の応用

もともと AdS/CFT は超弦理論の考えなので，超弦理論の分野で盛んに議論されてきた．しかし，近年は様相が変わってきており，AdS/CFT は素粒子論の枠を超えて議論されてきている．それは，AdS/CFT が「現実世界」を解析するうえで強力な手法になりつつあるからである．応用分野としては，QCD，原子核物理，物性論，流体力学（非平衡統計力学）などが挙げられる．プレプリント・サーバー（アーカイブ）で検索してみると，アーカイブの物理分野すべてで AdS/CFT の論文[2] が引用されている（図 1.1）．

たとえば，強い力の場合，その理論的基礎は量子色力学として理解されているが，強い力は文字どおり強いため，摂動論はあまり役に立たない状況が多い．しかし，AdS/CFT によれば，AdS 時空を使うことで強結合のゲージ理論が解析できる．そこで，AdS/CFT を使った強い力の解析が活発におこなわれている*3)．

一つの応用例は**クォーク・グルーオン・プラズマ** (QGP) である．QCD によると，十分高温では QCD の基礎的な自由度である**クォーク**や**グルーオン**が**非閉じこめ**を起こし，QGP をなす（4.1.2 節）．その実験も進行中である（4.1.3 節）．実験によると，QGP は**ずり粘性率**の小さい流体のように振るまう．このことは，QGP が強く相互作用をしていることを意味し，理論的な解析を難しくする（4.1.4, 11.2 節）．ところが，実験から示唆された粘性の値は，ブラックホールを使った AdS/CFT の予言値に近い（11 章）．このため，分野を超えて AdS/CFT が議論されるようになった．

ブラックホールと粘性がどう関係しうるのかイメージをもってもらうために，

*3)　もっとも，量子色力学は $SU(3)$ ゲージ理論だが，AdS/CFT であつかう系は主に $SU(N_c)$ 超対称ゲージ理論である．したがって，AdS/CFT の結果は近似的な結果である．

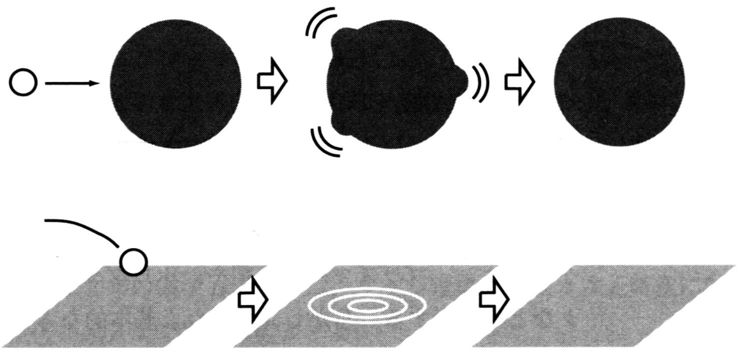


図 1.2　摂動を与えたとき，ブラックホールの振るまいは流体力学の振るまいとよく似ている．流体力学では，これは粘性の効果である．

直観的な説明をしておこう（図 1.2）．平衡状態にある熱力学系に，なにか摂動を与えることにしよう．たとえば，池にボールを落とすとさざ波が立つが，さざ波はやがて止んでもとの静かな水面に戻る．この**散逸**は，粘性による効果である．

ブラックホールの振るまいも，流体と似ている．やはり，ブラックホールにモノを落としたとしよう．すると，しばらくの間，ブラックホールの形は不規則になるが，最終的にはもとの対称的なブラックホールに戻ってしまう．これも一種の散逸とみなすと，この場合の散逸は摂動がブラックホールに吸収されることによって起こる．したがって，ブラックホールに対してもなにか粘性のような概念が考えられるはずで，この「粘性」は上のようなプロセスを考えれば計算できるだろう．

このような**緩和現象**は，**非平衡統計力学**や**流体力学**のテーマであり，主たる物理量は**輸送係数**である（9 章）．粘性も輸送係数の一つである．ブラックホールと流体との対応は単なるアナロジーにすぎないように思えるかもしれないが，実際にブラックホールが小さな粘性をもつとみなせることを示すのが本書の目標の一つである．

また，物性でもしばしば強相関系があらわれる（たとえば高温超伝導など）．こういった状況を受けて，AdS/CFT を物性論に応用しようという研究も盛んにおこなわれている（13 章）．

このように分野横断的な研究の性格から，この種の応用では，しばしば他分野の研究者が研究をリードしてきた．たとえば，原子核物理の研究者によって，AdS/CFT をクォーク・グルーオン・プラズマに応用しようという流れがはじまった．また物性物理の研究者によって，AdS/CFT でフェルミ面がはじめて議論された．

1.3 本書の構成

本書では AdS/CFT の応用を解説するが，AdS/CFT の応用を網羅することは目的ではない．この種の応用は膨大な数に上り，また日々新しい応用が提案されているからである．それら個々のトピックを紹介するより，基本的な考えをじっくり解説したい．そして，AdS/CFT の応用の典型例として，クォーク・グルーオン・プラズマへの応用や，ホログラフィック超伝導と呼ばれるトピックなどを解説する．しかし，いったん基本的な考えを理解しさえすれば，さまざまな系に応用することは難しくはない．基本的には同じような計算の繰り返しにすぎないからである．

本書では一般相対論や場の理論については初歩的な知識を仮定しているが，ブラックホールや超弦理論についての知識は仮定しない．また，AdS/CFT の応用は多分野にわたるので，さまざまな分野の基礎知識を解説しつつ議論を進める：

- 2, 3 章：ブラックホール，ブラックホール熱力学
- 4 章：量子色力学
- 5 章：超弦理論
- 9 章：非平衡統計力学，流体力学
- 12 章：物性論

それぞれの基礎知識をもった読者は，該当する章をとばして読んでも差しつかえない*4)．

また，本書ではどのようにして AdS/CFT の考え方にたどり着いたのかという説明にもページをさいているが，一方「習うより慣れろ」で実際の計算を通して AdS/CFT を理解していきたい読者もいるだろう．そういった場合，4.2 節，5 章をとばして読むのも一案である．

♦ がついている節や脚注は，やや進んだトピックであり，最初に読むときはとばしても差しつかえない．

1.4 規約について

本書では $\hbar = c = 1$ の自然単位系を使う．また，熱力学的な議論では，ボルツマン定数 $k_{\rm B} = 1$ の単位系もしばしば使う．ただし，いくつかの節ではこれらの単位系は用いず，すべての定数をあらわに書くこともある．

計量の符号 (signature) は，一般相対論や弦理論で標準的に用いられる

*4) なお，本書の目的はこれらの解説自体が目的ではないので，専門家には物足りない点があるかもしれない．また，筆者はこれらすべての分野の専門家というわけでもないので，誤っている点もあるかもしれない．それらの点については，ご指摘いただければ幸いである．

$(-,+,\ldots,+)$ の規約を使う．また計量から作られる諸量，クリストッフェル記号やリーマン・テンソルなどの規約は文献 [3] にしたがう．ベクトル，テンソルなどの添字に対して，5.3 節までは一般相対論の標準的な規約にしたがい，ギリシャ文字の添字 $\mu,\nu,\ldots$ を使う．ただし，本書ではゲージ理論の住む 4 次元時空と重力理論の住む 5 次元時空が出てくるので，添字がどちらの意味で使われているのか区別する必要がある．5.3 節以降は，

- ギリシャ文字の添字 $\mu,\nu,\ldots$ は，**ゲージ理論の住む 4 次元時空に対して使い**，$0,\ldots,3$ まで走るものとする．
- 一方，大文字アルファベットの添字 $M,N,\ldots$ は，**重力理論の住む 5 次元時空に対して使い**，$0,\ldots,4$ まで走るものとする．

なお，場の理論などでは Lorentzian 定式化とユークリッド定式化の 2 種類ある．本書では両方を適宜使い分けながら議論を進める（なるべく読者が混乱しないように配慮するが）．ユークリッド定式化は平衡系を議論するのに便利であり，Lorentzian 定式化は非平衡系を議論するのに便利だからである．

1.5 教科書について

AdS/CFT の基本的な総合報告としては，

[A] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity", *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].

AdS/CFT 研究の初期当時のまとまった総合報告である．残念ながら，いまだにこの総合報告を超えたものは出ていない．

本書では必要最低限の超弦理論の知識しか解説しないが，より詳しく超弦理論を学ぶには，

[B] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory* (Cambridge Univ. Press, 1987).

[C] J. Polchinski, *String theory* (Cambridge Univ. Press, 1998).

[D] B. Zwiebach, *A first course in string theory, second edition* (Cambridge Univ. Press, 2009).

文献 [B] は 1990 年代までの標準的な教科書，文献 [C] はそれ以後の標準的な教科書である．文献 [B] は，文献 [C] であまりあつかっていない点について詳しい記述があり，いまでも一定の価値がある．しかし，これらの教科書は，本格的に超弦理論を修めようとする人向けである．学部上級生や，他分野の人でも読みやすい教科書としては，文献 [D] がある．

そのほかの超弦理論の教科書で，近年のものとしては，

[E] K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction* (Cambridge Univ. Press, 2007).

[F] E. Kiritsis, *String theory in a nutshell* (Princeton Univ. Press, 2007).

[G] C. V. Johnson, *D-branes* (Cambridge Univ. Press, 2003).

これら近年の教科書にも AdS/CFT はとりあげられている．しかし，本稿執筆時点で，本書があつかうような AdS/CFT の応用を十分に扱った教科書はない．

本書ではブラックホールについては初歩から解説しているが，一般相対論そのものについては初歩的な知識を仮定している．一般相対論の教科書としては，

[H] B. F. Schutz, *A first course in general relativity, second edition* (Cambridge Univ. Press, 2009)［邦訳：バーナード・F・シュッツ，『相対論入門 第 2 版』（丸善，2010）］．

[I] R. M. Wald, *General relativity* (The Univ. of Chicago Press, 1984).

文献 [H] は初歩的なもの，文献 [I] は本格的な教科書である．

これら以外の分野の基礎知識については，教科書を適宜挙げる．

第 2 章
一般相対論とブラックホール

本書ではブラックホールが頻繁に登場するので，まずもっとも簡単なブラックホール，シュワルツシルド・ブラックホールについて説明し，シュワルツシルド・ブラックホールでの物理を調べる．

大ざっぱに言って，ブラックホールとは重力が強くなり，光さえも外に出られない領域のことである．そして，ブラックホールの境界を**ホライズン** (horizon) と呼ぶ．ホライズンからは光さえも逃れられないので，ホライズンはブラックホールの内から外へ因果的な影響がおよぶ限界である．

ブラックホールを正確に理解するには，一般相対論が欠かせないが，ブラックホールのようなものの存在は，ニュートン力学的な議論からも想像することができる．物体を星の表面から投げ上げたとき，速度が小さいと重力によって星に戻ってしまう．ニュートン力学では，星の重力から逃れるためには脱出速度を超えている必要がある．脱出速度は，エネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} \tag{2.1}$$

によって決まる．星の質量 M が同じ場合，半径 r が小さくなるほど，星表面の重力は強くなるので，脱出速度も大きくなる．星の半径がきわめて小さくなると，ついには脱出速度が光速度になる．このとき，どんな物体であっても重力からは逃れられない．上の式で $v = c$ とすると，このときの半径は，

$$r = \frac{2GM}{c^2} \tag{2.2}$$

で与えられる．これがホライズンに相当する．太陽程度の重さの場合，ホライズン半径は 3km 程度になり太陽半径の 24 万分の 1 しかない．

いくつかの理由から，正確にはこのような議論は誤りである：

1. まず，ニュートン力学的な議論では光速度は任意である．その結果として，このような議論では，ブラックホールから離れるにつれて光の速さが減る

ことになる．しかし特殊相対論では光速度は絶対速度であり，どの観測者にとっても一意的な値をもつ．

2. また，そもそもニュートン力学では重力が光にどう影響するのかは決められない．
3. さらに，ニュートン力学では光が脱出できず戻って来るにせよ，一時的に「ホライズン」から脱出できないわけではない．しかし，一般相対論によると，ホライズンから光が一時的にせよ脱出することはない．

このように，ニュートン力学的な議論には多々問題があるものの，ホライズン半径の式 (2.2) は一般相対論においてもそのまま成りたつ．ニュートン力学的な議論については，またあとでも利用する．

以下，一般相対論を用いてブラックホールを議論するが，まず与えられた時空で粒子の運動をどう記述するか，から出発することにする（平坦な時空の場合，これは実質的には特殊相対論のおさらいである）．これは，ブラックホールの物理を理解するために，あとでブラックホール周りでの粒子の運動を調べるからである．また，本書では時空をどう求めるかではなく，むしろ既知の時空に粒子のような「プローブ」を加えたときのプローブの振るまいを調べることを主眼としているので，このようなアプローチが自然である．さらに，超弦理論の現在の定式化も，粒子の場合を自然に拡張したものになっている．

2.1 粒子の作用

平坦な時空の場合—特殊相対論のおさらい

まずは平坦な時空での粒子の運動を考えよう．粒子の座標を $x^\mu := (t, x, y, z)$ とする．特殊相対論によると，粒子にとって相対論的な不変距離は

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.3}$$

である．2 点間の距離が $ds^2 < 0$ の場合，2 点間の関係を時間的 (timelike) と呼び，$ds^2 > 0$ を空間的 (spacelike)，$ds^2 = 0$ をヌル (null) と呼ぶ．粒子に対しては $ds^2 < 0$ なので

$$ds^2 = -d\tau^2 \tag{2.4}$$

で与えられる**固有時間** (proper time) τ を使ってもよい．

粒子にとって固有時間が相対論的な不変量なので，粒子の作用も固有時間で書くのが自然である：

$$\mathcal{S} = -m \int d\tau \ . \tag{2.5}$$

非相対論的極限を考えると，この作用が自然であることがみてとることができる． 速度 $v^i := dx^i/dt$ を用いると，$d\tau = dt(1-v^2)^{1/2}$ なので

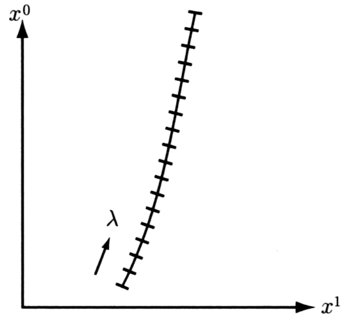


図 2.1 粒子は時空中で世界線を掃く.

$$\mathcal{S} = -m\int dt(1-v^2)^{1/2} \simeq -m\int dt\left(1-\frac{1}{2}v^2+\cdots\right), \quad (v \ll 1) \tag{2.6}$$

最右辺の式で，第 1 項は粒子の静止エネルギー，第 2 項は非相対論的な運動エネルギーをあらわしている.

粒子は時空中で**世界線** (world-line) を掃く（図 2.1）. 世界線に沿った任意パラメータ λ を導入すると，粒子の座標，つまり粒子の運動は $x^\mu(\lambda)$ によって指定することができる. このパラメータを使うと

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu d\lambda^2 \quad (\dot{} := d/d\lambda) \tag{2.7}$$

なので，作用は

$$\mathcal{S} = -m\int d\lambda\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = \int d\lambda\, L \tag{2.8}$$

と書きかえられる. λ は余分な変数なので，作用は λ に依存すべきではない. 実際，作用は

$$\lambda' = \lambda'(\lambda) \tag{2.9}$$

という変換の下で不変である.

粒子の正準運動量は

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = m\frac{dx_\mu}{d\tau} \tag{2.10}$$

($\dot{x}^2 := \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$). ただし，正準運動量は

$$p^2 = m^2\frac{\dot{x}^2}{-\dot{x}^2} = -m^2 \tag{2.11}$$

を満たすので独立ではない：

$$\boxed{p^2 = -m^2} \tag{2.12}$$

ラグランジアン L は座標 x^μ そのものは含まず $\dot{x}^\mu$ のみを含むため，p_μ は保存する．したがって，$p_\mu = m\,dx_\mu/d\tau =$（定数）であり，これは自由運動をあらわす．

粒子の **4 元速度** u^μ は，

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{2.13}$$

で定義される．速度 v^i で書くと，

$$u^\mu = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(1, v^i)\ , \quad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - v^2 := \gamma^{-2}\ . \tag{2.14}$$

$p_\mu = mu_\mu$ かつ $p^2 = -m^2$ より，$u^2 = -1$ である．

作用 (2.5) は m に比例するため，質量ゼロの粒子に対しては違う作用を使う必要がある．質量ゼロの粒子に対しても成りたつ作用としては

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int d\lambda\ \left\{e^{-1}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - em^2\right\}\ . \tag{2.15}$$

この作用から

$$e\ \text{の運動方程式：}\quad \dot{x}^2 + e^2m^2 = 0\ , \tag{2.16}$$

$$\text{正準運動量：}\quad p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{e}\dot{x}_\mu = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\ . \tag{2.17}$$

式 (2.17) の最後の等号では式 (2.16) を使う．式 (2.16) を使うと，ラグランジアンは

$$\frac{1}{2}\left\{e^{-1}\dot{x}^2 - em^2\right\} = -m\sqrt{-\dot{x}^2} \tag{2.18}$$

となり式 (2.8) に帰着する．

式 (2.15) も座標変換不変性をもち，

$$\lambda' = \lambda'(\lambda)\ , \tag{2.19}$$

$$e' = \frac{d\lambda}{d\lambda'}e\ , \tag{2.20}$$

の下で，作用 (2.15) は不変に保たれる．

粒子の作用（曲がった時空）

特殊相対論から一般相対論に移ると，座標不変な距離は平坦な時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ のかわりに曲がった時空の計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を使い

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.21}$$

で与えられる．計量 $g_{\mu\nu}$ をどう決めるかはあとで議論することにして，ここではまず曲がった時空での粒子の運動を考えることにする．

曲がった時空での粒子の作用も，$\eta_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu}$ で置きかえることで得られる：

$$\mathcal{S} = -m \int d\tau = -m \int d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}\ . \tag{2.22}$$

平坦な時空同様，正準運動量は

$$p_\mu = m \frac{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\nu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\ , \quad \dot{x}^2 := g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{2.23}$$

で与えられ，$p^2 = -m^2$ の拘束条件が存在する．また*1)，

> 計量がある座標 x^μ を含まないときは p_μ が保存する．

変分原理 $\delta\mathcal{S} = 0$ は，固有時間が極値をとる世界線を与える．平坦な時空のときは，粒子は自由運動をし，世界線は「直線」だった．曲がった時空の場合，作用の極値を与える世界線 $x^\mu(\tau)$ を**測地線** (geodesics) と呼ぶ．作用を x^μ で変分すると，

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{2.24}$$

という運動方程式が得られる．これを**測地線方程式** (geodesic equation) と呼ぶ*2)．ここで $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ はクリストッフェル記号

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \tag{2.25}$$

である．測地線方程式を解けば粒子の運動が決まるが，以下でみるように，この本で考えるようなブラックホールでは十分な数の保存量があるため，測地線方程式を解くまでもない．

質量ゼロの粒子の場合も，作用 (2.15) で $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ の置きかえで与えられる．これらの粒子の作用は，超弦理論のストリングやブレーンといった物体にも自然に拡張可能である（8.3 節）．

2.2 アインシュタイン方程式とシュワルツシルド計量

ここまで計量の形は指定せずに議論してきたが，計量はアインシュタイン方程式によって決まる*3)：

---

*1) 保存されるのは p_μ であり，一般に p^μ とは一致しないことに注意．平坦な時空では，p_μ と p^μ には符号の違いしかないが，曲がった時空では計量 $g_{\mu\nu}(x)$ の因子分違うので，p_μ と p^μ の関数形は一致しない．

*2) ここで任意の世界線パラメータ λ ではなく，固有時間 τ を使っていることに注意．任意の λ に対しては，運動方程式は一般に測地線方程式の形にはならない．τ のようなパラメータを**アフィンパラメータ**と言う．測地線方程式から簡単にわかるように，アフィンパラメータには $\tau \to a\tau + b$ (a, b：定数) という線形変換の自由度しかない．質量ゼロ粒子に対しては固有時間は定義できないものの，アフィンパラメータの定義は可能である．

*3) あまりなじみのない読者のために，2.5 節に一般相対論のフォーマリズムを簡単にまとめた．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\, T_{\mu\nu}\ . \tag{2.26}$$

ここで，G はニュートン定数，$T_{\mu\nu}$ は物質場のエネルギー・運動量テンソルである．アインシュタイン方程式は，物質場のエネルギー・運動量テンソルによって，時空の曲がりが決まると主張する．

時空の曲がりを決めるエネルギー・運動量テンソルとして，本書ではさまざまな物質場が登場するが，とくに本書で重要な役割を果たすのが，

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \tag{2.27}$$

という形のものである．Λ は**宇宙定数**と呼ばれる．この場合，アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0\ . \tag{2.28}$$

式 (2.27) より，宇宙定数は一定のエネルギー密度として働く．このため，正の宇宙定数 ($\Lambda > 0$) はダーク・エネルギーとの関連で近年盛んに議論されている．一方，AdS/CFT で登場するのは，負の宇宙定数 ($\Lambda < 0$) の場合である．AdS/CFT で使われる反ド・ジッター時空は，この場合の解である（6 章）．

一方，物質場がないときのアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{2.29}$$

の解として，もっとも簡単なブラックホール，**シュワルツシルド** (Schwarzschild) **ブラックホール**がある：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\Omega_2^2\ . \tag{2.30}$$

ここで $d\Omega_2^2 := d\theta^2 + \sin\theta^2 d\varphi^2$ は半径 1 の S^2 の面積要素である．このブラックホールの性質について，いくつか列挙しておくと

- $r \to \infty$ で計量は平坦な時空 $ds^2 \to -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$ に近づく．
- あとでわかるように（2.3.2 節），M はブラックホールの質量をあらわす．これもあとでわかるように，GM/r という振るまいは，4 次元時空でのニュートンポテンシャルの振るまいから来る．
- 計量 $g_{00} = 0$ となる $r_0 = 2GM$ がホライズンである．
- この計量から，

  $$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6} \tag{2.31}$$

  のようなリーマン・テンソルなどで作られる座標不変な量を考えると，$r = 0$ で発散している．この場所は**時空特異点**と呼ばれ，重力が無限に強くなる場所である．

この計量を理解するために，このブラックホール周りでの粒子や光子の運動を調べる．

2.3 シュワルツシルド・ブラックホールの物理

2.3.1 重力赤方偏移

重力赤方偏移は，一般相対論の古典的予言と呼ばれる 3 つの予言の一つである．(ほかの 2 つについては 2.3.2 節でふれる)

地点 A と B に，それぞれ静止した観測者がいるとする．A で発した光を，B で受けとるものとする．光は $p^2 = 0$ あるいはヌル測地線 $ds^2 = 0$ を描くので，

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 = 0 \ , \tag{2.32}$$

$$dt^2 = \frac{g_{rr}}{-g_{00}}dr^2 \quad \to \quad \int_A^B dt = \int_A^B \sqrt{\frac{g_{rr}(r)}{-g_{00}(r)}}dr \ . \tag{2.33}$$

右辺は時刻に依存しないので，光が A から B に到達するのにかかる座標時間は常に同じである．したがって，A が dt のあいだだけ光を発したとすると，B がその光を受けとるのにかかる座標時間も dt である（図 2.2）．

しかし，$d\tau^2 = |g_{00}|dt^2$ なので，それぞれの観測者にとっての固有時間の進みは違う：

$$d\tau_A^2 \simeq |g_{00}(A)|dt^2 \ , \tag{2.34}$$

$$d\tau_B^2 \simeq |g_{00}(B)|dt^2 \ . \tag{2.35}$$

どちらの観測者にとっても，光の総振動数は同じはずだから，

$$\omega_B d\tau_B = \omega_A d\tau_A \ . \tag{2.36}$$

光子のエネルギーは $E = \hbar\omega$ なので，$E_B d\tau_B = E_A d\tau_A$ つまり

$$\boxed{\frac{E_B}{E_A} = \sqrt{\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}}} \tag{2.37}$$

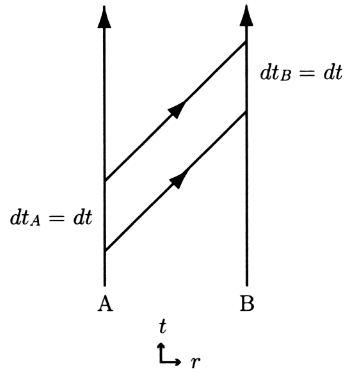


図 2.2　A と B の光のやりとり．

簡単な場合としてシュワルツシルド・ブラックホールを考え，$r_B = \infty, r_A \gg GM$ とすると，

$$E_\infty = \sqrt{|g_{00}(A)|}E_A \simeq E_A - \frac{GM}{r_A}E_A < 0 \ . \tag{2.38}$$

ここで，$\sqrt{|g_{00}(A)|} = (1-2GM/r_A)^{1/2} \simeq 1-(GM)/r_A$ を使った．したがって，無限遠での光子のエネルギーは減少する．とくに A がホライズンの場合，$g_{00}(A) = 0$ なので，$E_\infty \to 0$ となって，光子は無限の赤方偏移を受ける．光子のエネルギーが減少するのは，重力ポテンシャルを上がったためである．実際，式 (2.38) の第 2 項は光子に対するニュートン的な重力ポテンシャルの形をしている．

2.3.2　粒子の運動

遠方での運動

粒子の運動は測地線方程式 (2.24) から求められるが，シュワルツシルド・ブラックホールのような静的球対称解の場合，測地線方程式を解くまでもなく保存則から求めることができる．

- まず球対称の場合，運動は 1 つの平面内に限定されるので，その平面を赤道面 $(\theta = \pi/2)$ に選べる．
- また，2.1 節でみたとおり，計量が，ある座標 x^μ を含まない場合，x^μ に共役な運動量 p_μ が保存する．静的球対称解の場合，計量は t, φ によらないため，エネルギー p_0，角運動量 p_φ が保存する．

したがって，粒子の 4 元運動量は

$$p_0 =: -mE \ , \tag{2.39a}$$

$$p_\varphi =: mL \ , \tag{2.39b}$$

$$p^r = m\frac{dr}{d\tau} \ , \tag{2.39c}$$

$$p^\theta = 0 \ , \tag{2.39d}$$

(E, L は単位質量あたりのエネルギーと角運動量)．運動量は拘束条件 $p^2 = -m^2$ を満たすので

$$g^{00}(p_0)^2 + m^2 g_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + g^{\varphi\varphi}(p_\varphi)^2 = -m^2 \ . \tag{2.40}$$

シュワルツシルド・ブラックホールでは，まず角運動量 $L = 0$ のときは

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (E^2-1) + \frac{2GM}{r} \ . \tag{2.41}$$

$r \to \infty$ で $(dr/d\tau)^2 \simeq E^2 - 1$ なので，$E = 1$ は無限遠方で粒子が静止状態にあった場合のエネルギー，つまり粒子の質量エネルギーをあらわす．この式を

τ で微分し，非相対論的な場合は $\tau \simeq t$ となるので

$$\frac{d^2r}{dt^2} \simeq -\frac{GM}{r^2} \ . \tag{2.42}$$

これはニュートンの重力法則にほかならない．したがって，シュワルツシルド・ブラックホール (2.30) の M はブラックホールの質量をあらわす．

同様に角運動量 L がある場合，

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \tag{2.43}$$

$$= (E^2 - 1) + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GML^2}{r^3} \ . \tag{2.44}$$

式 (2.44) の第 3 項は遠心力をあらわす．これに対して，第 4 項は新しい項であり，一般相対論的な効果をあらわす．一般相対論の古典的予言には，重力赤方偏移以外に

- 水星の近日点移動
- 光の曲がり

があるが，いずれもこの項からの効果である*4)．第 3 項と第 4 項を比べると，第 4 項は $r \simeq 2GM$ 程度に近づいてはじめて第 3 項と同等の寄与となる．この距離はブラックホールのホライズン半径に相当し，太陽質量の重力場の場合，3km 程度なので，通常微弱な効果だということがわかる．

ホライズン近傍での運動

次に，ホライズン近傍での粒子の運動を考える．ホライズンに落下するまでの時間を求める．簡単のために，無限遠では静止状態にあり $(E = 1)$，動径方向にまっすぐ落ちる運動 $(L = 0)$ を考える．$E = 1, L = 0$ の粒子の運動は，式 (2.41) より

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{r_0}{r} \tag{2.45}$$

$(r_0 = 2GM)$．ホライズン近傍では

$$\frac{dr}{d\tau} \simeq -1 \tag{2.46}$$

となる．落下する粒子に対しては，時間経過とともに r が小さくなるので，右辺の符号を負に選んだ．したがって，$r = r_0 + R$ から $r = r_0 + \epsilon$ まで動くのに

$$\tau \simeq -\int_{r_0+R}^{r_0+\epsilon} dr = R - \epsilon \ . \tag{2.47}$$

すなわち，落下する粒子の固有時間 τ の立場では，**有限時間でホライズンに到達する**．

*4) 光の曲がりの場合は，式 (2.40) のかわりに質量ゼロの式を使う．

一方，座標時間 t の立場では，話が変わってくる．定義より $p^0 = m dt/d\tau$ だが，一方保存則より $p^0 = g^{00} p_0 = m(1 - r_0/r)^{-1}$ なので，

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r_0(r - r_0)^2}{r^3} \ . \tag{2.48}$$

ホライズン近傍では

$$\frac{dr}{dt} \simeq -\frac{r - r_0}{r_0} \tag{2.49}$$

なので，

$$t \simeq -r_0 \int_{r_0+R}^{r_0+\epsilon} \frac{dr}{r - r_0} = r_0(\ln R - \ln \epsilon) \ . \tag{2.50}$$

$\epsilon \to 0$ で $t \to \infty$ となるので，t の立場では，**粒子がホライズンに到達するのに無限の時間がかかる**．なお，ホライズン近傍の式 (2.49) は光子 (2.53) と同じ形になる．つまりホライズン近傍では，粒子の速度は光速に近づく．

光子の場合も考えてみよう．光子に対しては，$p^2 = 0$ あるいは $ds^2 = 0$ なので，

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{rr} dr^2 = 0 \tag{2.51}$$

$$\to \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{g_{00}}{g_{rr}} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{2.52}$$

$$\to \frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \simeq -\frac{r - r_0}{r_0} \ . \tag{2.53}$$

したがって，ホライズン近傍では粒子の場合 (2.49) と同じ形である．また，光子がホライズンに落下する場合ではなく，逆に光子がホライズンから外向きに出る場合を想定すると，ホライズンで出た光が（有限 r でも）観測者に到達するのは $t \to \infty$ である．

落下する粒子の立場では，ホライズンで特殊なことはないのに対し，t の立場では特異なことが起きている．これはホライズン近傍ではシュワルツシルド座標 (t, r) の振るまいが悪いことを意味している．そこで，落下する粒子の立場がみやすい座標系を導入することにする．

2.4 クルスカル座標

これまでにわかった粒子の運動は，新しい座標系，**クルスカル** (Kruskal) **座標**を導入することで自然に理解できる．クルスカル座標 (u, v) は

$$r > r_0 \begin{cases} u = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \cosh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \\ v = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \sinh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \end{cases} \tag{2.54}$$

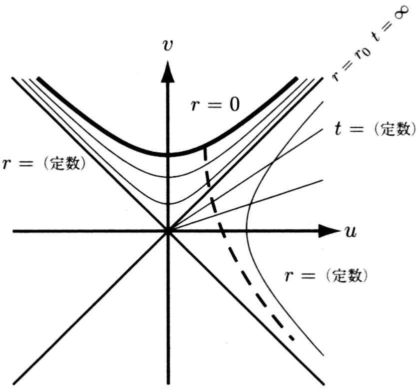


図 2.3 クルスカル座標．光円錐が 45° に保たれ，因果構造が見やすい．太い線は特異点をあらわす．破線は粒子の軌跡の一例である．ホライズンを横切ると，粒子は特異点に到達せざるをえない．

$$r<r_0 \begin{cases} u=\left(1-\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \sinh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \\ v=\left(1-\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} e^{r/(2r_0)} \cosh\left(\frac{t}{2r_0}\right) \end{cases} \tag{2.55}$$

として定義される．計量 (2.30) を座標変換すると，

$$ds^2=\frac{4r_0^3}{r}e^{-r/r_0}(-dv^2+du^2)+r^2d\Omega_2^2\ . \tag{2.56}$$

上の計量では (u,v) だけではなく r も用いているが，$r=r(u,v)$ であり，

$$\left(\frac{r}{r_0}-1\right)e^{r/r_0}=u^2-v^2 \tag{2.57}$$

から決まる．

この変換と計量から，以下のさまざまなことがわかる（図 2.3 も参照）：

- $r=r_0$ で計量 (2.56) に特異性はない．$r=0$ には特異性が残る．変換 (2.54) には $r=r_0$ で特異性があるが，これは問題にはならない．$r=r_0$ で特異性がある座標と特異性がない座標を変換するので，この特異性は当然である．
- ヌル世界線 $ds^2=0$ は $dv=\pm du$ である．この座標系では，特殊相対論のように 45° の線が光円錐をあらわす．このため因果構造を見やすい利点がある．
- 式 (2.57) より $r=$（定数）の線は，双曲線である．
- とくに，$r=r_0$ の**ホライズンは，ヌル世界面である**．つまり，ホライズンは実際には空間の境界をあらわしているのではなく，光円錐そのものである．光円錐の内から外へは影響をおよぼすことができない．同様に，ホライズンもホライズンの外へは影響をおよぼすことができない．つまり，光さえも $r<r_0$ から $r>r_0$ には届かない．

- $r < r_0$ では，$r =$（定数）の線は空間的になる．粒子の測地線は空間的にはなれないので，粒子は $r =$（定数）にはとどまれない．$r = 0$ の特異点も空間的である．つまり，特異点は空間の一点ではなく，むしろ時間の終わりという意味をもつ．
- 式 (2.54) より $t =$（定数）の線は，直線である．とくに，$t \to \infty$ は $u = v$ である．座標 t では，ホライズンに到達するのに無限の時間がかかるのが読みとれる．

これらのことをまとめると，ホライズンに落ちた粒子は逃れられず，必然的に特異点に到達することになる．

2.5 補遺：一般相対論のおさらい

一般座標変換

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x) \tag{2.58}$$

の下で，

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \tag{2.59}$$

と変換する量をベクトル,「逆」の変換性

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu} \tag{2.60}$$

をもつ量を 1 フォームと言う．添字を複数もつテンソルも同様に定義する．

一般にテンソルの微分 $\partial_\mu V^\nu$ は，テンソルとして変換しない．そこで，テンソルとして変換する共変微分 ∇_μ を使う．ベクトルや 1 フォームの場合，共変微分は

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + V^\alpha \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} \ , \tag{2.61}$$

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - V_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \ . \tag{2.62}$$

また，有用な関係式として，ベクトルの発散は

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} V^\mu \right) \ . \tag{2.63}$$

例として，

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \tag{2.64}$$

はベクトルとして変換し，計量は

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x) \tag{2.65}$$

と変換する．したがって，線素 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ は座標変換の下で不変である．無限小変換 $x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$ の下で，式 (2.65) を書きかえると，

$$g'_{\mu\nu}(x-\xi) = \left(\delta^\rho{}_\mu + \partial_\mu \xi^\rho\right)\left(\delta^\sigma{}_\nu + \partial_\nu \xi^\sigma\right) g_{\rho\sigma} \tag{2.66}$$

より

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\nu}(x) + (\partial_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} + (\partial_\nu \xi^\rho) g_{\mu\rho} + \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} && (2.67) \\ &= g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu && (2.68) \end{aligned}$$

となる．

一般相対論では，作用は一般座標変換の下で不変なスカラー量であることを要求する．式 (2.64) より，

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x \ . \tag{2.69}$$

$|\partial x'/\partial x|$ はヤコビアンである．一方，

$$\sqrt{-g'} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \sqrt{-g} \ , \qquad g := \det g \tag{2.70}$$

となるので，一般座標不変な体積要素は $d^4x\sqrt{-g}$ である．

計量はアインシュタイン–ヒルベルト作用によって決まる：

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{-g} R \ . \tag{2.71}$$

ここで G はニュートン定数であり，リッチ・スカラー R は，リーマンテンソル $R^\alpha{}_{\mu\nu\rho}$，リッチ・テンソル $R_{\mu\nu}$ から以下のように定義される：

$$R^\alpha{}_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \ , \tag{2.72}$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \ , \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ . \tag{2.73}$$

アインシュタイン–ヒルベルト作用を変分すると，

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \, \Big\{ &\sqrt{-g} R_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) + (\delta\sqrt{-g}) R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \\ &+ \sqrt{-g}(\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \Big\} \ . \end{aligned} \tag{2.74}$$

$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である．第 2 項目は

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.75}$$

を使う．第 3 項目は，表面項に帰着することを示すことができるので，運動方程式には寄与しない*5)．したがって，

*5) ただし，変分原理を well-defined におこなうために，表面項には特別な注意が必要である．この点について関連する事情は 7.4, 11.4 節でふれる．

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} \tag{2.76}$$

となり，$\delta\mathcal{S} = 0$ を要求して真空中のアインシュタイン方程式が得られる：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0\ . \tag{2.77}$$

式 (2.77) の縮約をとると，$R_{\mu\nu} = 0$ となる．

物質場の作用 $\mathcal{S}_{\mathrm{matter}}$ を加えると，運動方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\,T_{\mu\nu}\ . \tag{2.78}$$

ここで $T_{\mu\nu}$ は，物質場のエネルギー・運動量テンソルである：

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{S}_{\mathrm{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}\ . \tag{2.79}$$

本書ではさまざまな物質場が登場するが，アインシュタイン–ヒルベルト作用に加えることができるもっとも単純な作用は，

$$\mathcal{S}_{cc} = -\frac{1}{8\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\Lambda \tag{2.80}$$

であり，これが宇宙定数である．式 (2.79) より，

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \tag{2.81}$$

であり，アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.82}$$

となる．

第 3 章
ブラックホールと熱力学

通常の統計力学系と同様に，量子論的なブラックホールは熱力学量をもつ．本章では，シュワルツシルド・ブラックホールを例に使い，ブラックホールと熱力学の関係を説明する．

3.1 ブラックホールと熱力学

通常のシュワルツシルド・ブラックホールの場合，ホライズンの半径は $r_0 = 2GM/c^2$ で与えられる．ホライズンの半径はブラックホールの質量に比例するので，物質がブラックホールに落ちこむとホライズンの面積

$$A = 4\pi r_0^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \tag{3.1}$$

は増大する．また，古典論的にはブラックホールからはなにも出てこない．したがって，ホライズン面積は減ることのない量であり*1)，これは熱力学のエントロピーを思い起こさせる．したがって，ブラックホールもエントロピーのような量 $S_{\rm BH}$ をもち（以下，**ブラックホール・エントロピー**と呼ぶ），

$$S_{\rm BH} \propto A\ ? \tag{3.2}$$

という関係が推測される．

実は第 2 法則に限らず，ブラックホールの性質は熱力学の法則と同じ形でまとめることができる．そもそもブラックホールは，質量，角運動量，電荷といった少数の性質だけで指定されることが知られている（**ノー・ヘア定理**）．つまり，ブラックホールはもとの星のほかの性質，たとえば形や組成などにはよらない．逆に言えば，少数の初期条件にのみ制限されるので，一つのブラックホールに

---

*1)　ホーキング放射によりブラックホールが蒸発していくと，ホライズンの面積は減少する．しかし，ブラックホール・エントロピーと放射のエントロピーを足したものは常に増大する（一般化された第 2 法則）．

はさまざまな作り方があることになる．たとえば，重力崩壊でできるブラックホールが，たとえ当初は非対称な形をしていても，最終的には単純な球対称なシュワルツシルド・ブラックホールに帰着する（角運動量，電荷がゼロの場合）．

このこと自体が，すでに熱力学と似ている．熱力学は，多数の分子や原子をあつかうときの理論である．熱力学によると，なにも分子の状態をすべて知らなくても，温度や圧力といった少数の巨視的なパラメータだけで系を記述することができる．微視的なパラメータから巨視的なパラメータへ移行する操作を，「粗視化」と呼ぶ．

ブラックホールの性質が，少数のパラメータだけで書けるということは，ブラックホールに対してもなんらかの意味で「粗視化」という考えが成りたつことを示唆する．ただ，現在でもこの粗視化が正確にどのようにしておこなわれているのかはっきりしない．ブラックホールの微視的な理論，ブラックホールの量子化は，完全には解決していないからである．

3.1.1 第ゼロ法則

ブラックホールの性質と熱力学の法則が対応していることをみてみよう．熱力学系は，十分時間がたてば熱平衡に達し，そうなれば系の至るところで温度が一定となる．このことを熱力学の第ゼロ法則と言う．ブラックホールはたとえ当初は非対称な形をしていても，最終的には球対称なものに帰着した．球対称ということは，ブラックホール表面で重力が一定ということである．つまり，ホライズンでの重力は当初は一定でなくても，いずれは一定になる，とノー・ヘア定理を言いかえることができる．定常状態でホライズンの重力が一定というのは，温度が一定という熱力学第ゼロ法則と似ている．すなわち，ホライズンの重力と温度とは対応していそうである．また温度は正の値をとるが，重力も負にはならない．つまり，表面重力が一定のブラックホールというのは，ある意味で熱平衡に達したブラックホールと考えられる．

このホライズンでの重力加速度を**表面重力** κ と言う．ニュートン重力では重力加速度は

$$a = \frac{GM}{r^2} \tag{3.3}$$

となる．したがってホライズン $r = r_0$ では

$$\kappa = a(r = r_0) = \frac{c^4}{4GM} \tag{3.4}$$

となる．

このブラックホールでは，表面重力がニュートン重力加速度と一致するが，正確には注意が必要である．表面重力とはホライズンにとどまっているために必要な加速度だが，一般相対論では，誰から見てなのかを指定する必要がある．次節できちんと議論するように，表面重力は，とどまっている本人ではなく，無限

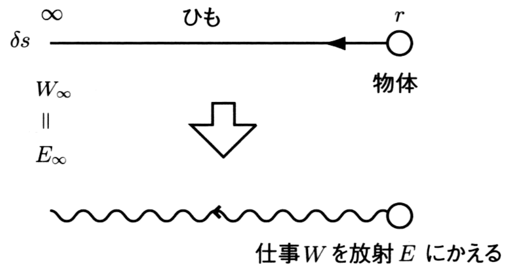


図 3.1 表面重力を求める．無限遠から「ひも」で物体を引っ張り，加えられた仕事を放射にかえ，無限遠で回収する．

遠方の観測者から見て測った重力のことである．ホライズンより内側では，どんなに加速しても引きずり込まれてしまう．したがって，とどまろうとしている本人にとっては，必要な加速度は無限大である．その加速度を無限遠方の観測者が見ると，ニュートン重力と同じ有限の値になるのである．二人の間で加速度の値が一致しないのは，重力赤方偏移のせいである．

3.1.2 表面重力 ♦

表面重力を

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \cdots \tag{3.5}$$

という一般的な静的計量で考える．$\cdots$ は議論には関係しないホライズン方向の線素をあらわす．2.3.2 節にしたがい粒子の運動を求めると，

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - f \quad \rightarrow \quad \frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}f' \,, \quad (':= \partial_r) \,. \tag{3.6}$$

シュワルツシルド・ブラックホールでは $f = 1 - 2GM/r$ なので，$d^2r/d\tau^2 = -GM/r^2$ となり，2.3.2 節でみたようにニュートン重力と同じ形をとる．

この意味で，前節ではニュートン重力的な議論を使ったが，これは共変な加速度 a^μ ではなく a^r 成分である．共変な加速度の絶対値，固有加速度 a は*2)

$$a^2 := g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu = \frac{f'^2}{4f} \,, \tag{3.7}$$

$$a = \frac{f'}{2f^{1/2}} \,. \tag{3.8}$$

ホライズンでは通常 $f(r_0) = 0$ なので，固有加速度は発散する．これは当然の結果で，ホライズンからは逃れられないことをあらわしている．

表面重力とは，無限遠方の観測者がホライズンでの物体を保持するために必要な（単位質量あたりの）力 $a_\infty(r_0)$ である．これを求めるために，位置 r の物体を質量ゼロの「ひも」で無限遠方の観測者が引っ張っているとする（図 3.1）．

*2) 静止した物体に対しては，$a^0 = 0$ を確かめることができる．

いま，固有長さ δs だけ引っ張ったとすると，加えられた仕事は

$$W_\infty = a_\infty \delta s \quad (\text{無限遠方}), \tag{3.9}$$

$$W = a\,\delta s \quad (\text{位置 } r). \tag{3.10}$$

加えられた仕事 W を，位置 r で放射 $E = W$ にかえて無限遠方で回収する．無限遠方で受けとるエネルギー E_∞ は，2.3.1 節の重力赤方偏移により

$$E_\infty = \sqrt{\frac{f(r)}{f(\infty)}} E = f(r)^{1/2} a\,\delta s\,. \tag{3.11}$$

ここで $f(\infty) = 1$ を使った．しかし，エネルギー保存則より $W_\infty = E_\infty$ でなければいけない．したがって，$a_\infty = f^{1/2} a = f'/2$，つまり

$$\kappa := a_\infty(r_0) = \frac{f'(r_0)}{2} \tag{3.12}$$

となり，ナイーブな結果 (3.6) と一致する．

3.1.3 第 1 法則

いま，ブラックホールの質量が dM だけ増えたとすると，それによってホライズンの面積も dA だけ増える．したがって，

$$dM \propto dA \tag{3.13}$$

という関係が成りたつであろう．これを等号で結ぶためには，次元をあわせる必要がある．まず左辺は GdM となる．と言うのも，一般相対論では質量はニュートン定数と一緒にあらわれるからである．アインシュタイン方程式は，質量エネルギーが時空をどう曲げるかを教えるが，G は質量を時空の曲がりに翻訳する量である．このように G と M は一緒にあらわれる．こうすると，右辺 dA の係数として，加速度の次元をもった量が必要なことがすぐにわかる．この加速度として，さきほど出てきた表面重力を使うのは自然であろう．実際，A はエントロピーのような量であるが，熱力学の第 1 法則では $dE = TdS$ なのでエントロピーに温度がかかる．さきほど，表面重力は温度の役割をになっていることをみたので，この意味でも表面重力が出てくるのは自然である．このため

$$GdM \simeq \kappa dA \tag{3.14}$$

となるだろう．実際に，式 (3.1) を微分すれば，比例定数まで入れて

$$GdM = \frac{\kappa}{8\pi} dA \tag{3.15}$$

という式が成りたつことが簡単にわかる．これがブラックホールの**第 1 法則**である．

なお，ブラックホールの第 3 法則については，3.3.2 節で議論する．

3.2 アナロジーから熱力学へ

3.2.1 ホーキング放射

このようにブラックホールの法則は，熱力学の法則とよく似ている．しかし，このままではこれは単なるアナロジーにすぎない．式の形が同じだということは，同じものをあらわしていることにはならない．事実，このままではブラックホールの法則を熱力学の法則としてみるにはいくつか問題点がある：

1. ブラックホールからはなにも出てこないはずである．ブラックホールが本当の意味で温度をもつのなら，熱放射をするはずである．
2. エントロピーとホライズンの面積は似た振るまいをするが，次元が違う．$k_{\mathrm{B}} = 1$ の単位系では，エントロピーは無次元量だが，面積は次元をもっている．なにか長さの二乗で割れば無次元量になるが，これまでのところ適当な量は見当たらない．

ブラックホールはこの宇宙に単独で存在するわけではない．たとえばブラックホールを作り出す物体があるはずであり，このような物体はミクロなスケールでは量子力学にしたがっている．物質の量子効果を考えると，実際にブラックホールは黒体放射を起こし（ホーキング放射），その温度は

$$k_{\mathrm{B}}T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c} \tag{3.16}$$

$$= \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \quad \text{（シュワルツシルド・ブラックホールの場合）} \tag{3.17}$$

で与えられる．量子効果だという点は，温度が $\hbar$ に比例することに反映されている．この温度，**ホーキング温度**をどう求めるかについては，あとで説明する．いずれにせよ，このように温度が決まれば，第 1 法則 (3.15)

$$d(Mc^2) = \frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA \tag{3.18}$$

$$= \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_{\mathrm{B}} c} \frac{k_{\mathrm{B}} c^3}{4G\hbar} dA \tag{3.19}$$

を使うことで S_{BH} の比例係数が決まる：

$$\boxed{S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4G\hbar} k_{\mathrm{B}} c^3 = \frac{1}{4} \frac{A}{l_{\mathrm{pl}}^2} k_{\mathrm{B}}} \tag{3.20}$$

ここで $l_{\mathrm{pl}} = \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 10^{-35}$ メートルは**プランク長さ**と呼ばれる．プランク長さは，量子重力理論の基礎的な長さスケール，つまり量子重力効果が効きはじめる長さだと考えられている．古典論の基礎定数 G, c だけでは，長さの次元をもつ量は作れない．式 (3.20) を**面積則**と言う．

ブラックホール・エントロピーについていくつか注意しておこう．まず第一に，ここでの議論は S_{BH} を実際にエントロピーとして「導出」したわけではな

い．微視的には，エントロピーは系の自由度を数える尺度であるが，ここでは微視的状態を数え上げたわけではない．依然として，単に古典論的なブラックホールの法則を実際に熱力学の法則だと仮定しているにすぎない．

また，ブラックホール・エントロピーの大きな特徴は，それがホライズンの「面積」に比例する点である．これに対して統計力学的なエントロピーは，系の「体積」に比例しなければいけない．この違いは AdS/CFT にとって重要である．また，これは微視的状態の性質についての手がかりも与える．すなわち，ブラックホールは，通常の統計力学系としては 1 次元低い次元の理論で書ける可能性を示唆する．AdS/CFT では，この統計力学系がゲージ理論であると主張する．このような考えを一般に**ホログラフィック原理**と言う．AdS/CFT はホログラフィック原理の一例である．

さて，この議論では例としてシュワルツシルド・ブラックホールを使ったが，式 (3.20) は特定のブラックホールにはよらない．重力作用がアインシュタイン–ヒルベルト作用，つまり

$$\frac{1}{16\pi G_d}\int d^dx\sqrt{-g}R \tag{3.21}$$

で与えられる限り，ブラックホール・エントロピーは常に式 (3.20) になるということが知られている [4]．つまり，式 (3.20) は一般相対論のブラックホールのみならず，超弦理論やそのほかの重力理論でも成立する．

3.2.2　ホーキング温度とユークリッド定式化

ホーキング温度を求めるにはいくつか方法がある．ホーキングが使った方法は，ブラックホール時空で物質場を量子化するというものである．しかし簡便な方法は，計量をユークリッド化して，時空がなめらかなことを要請することである．すると虚時間方向に周期境界条件が必要になるが，ブラックホールの温度はこの周期 β の逆で与えられる．

計量 (3.5) を $t_{\mathrm{E}}=it$ とユークリッド化すると

$$ds_{\mathrm{E}}^2=+f(r)dt_{\mathrm{E}}^2+\frac{dr^2}{f(r)}\ . \tag{3.22}$$

いま「ホライズン」近傍 $r\simeq r_0$ だけに着目する．ホライズンでは $f(r_0)=0$ なので $f\simeq f'(r_0)(r-r_0)$ となる*3)．したがって，

$$ds_{\mathrm{E}}^2\simeq\frac{dr^2}{f'(r_0)(r-r_0)}+f'(r_0)(r-r_0)dt_{\mathrm{E}}^2 \tag{3.23}$$

$$=d\rho^2+\rho^2d\left(\frac{f'(r_0)}{2}t_{\mathrm{E}}\right)^2\ . \tag{3.24}$$

ここで，$\rho:=2\sqrt{(r-r_0)/f'(r_0)}$ という新しい座標を導入した．この新しい

*3)　ここで $f'(r_0)\neq0$ を仮定している．この仮定は，2 つのホライズンが縮退している極限ブラックホール（3.3.2 節）では満たされない．

座標系では，計量は極座標系 $\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$ と同じ形をとっており，したがって $f'(r_0)t_E/2$ の周期が 2π であれば，たんなる平坦な空間である．違う周期をとると $\rho = 0$ を頂点とした「円錐形」になってしまう．したがって，t_E の周期を $\beta = 4\pi/f'(r_0)$ すなわち

$$\boxed{T = \frac{f'(r_0)}{4\pi}} \tag{3.25}$$

と要請する．式 (3.12) と比べると，$T = \kappa/(2\pi)$ となり式 (3.16) が導かれる．シュワルツシルド・ブラックホールの場合，$f(r) = 1 - r_0/r$ なので $T = 1/(4\pi r_0) = 1/(8\pi GM)$ である．ユークリッド化した計量では，ホライズンは極座標の原点なので，ホライズンの内側 $r < r_0$ を含まないことに注意．

このユークリッド化の手法の背景にあるのは量子統計力学である．量子統計力学では虚時間の周期が温度の逆数と自然に結びつく．そこでブラックホールの熱力学量を「第一原理」的に求めるには，以下のようにおこなう[5]．また，この方法はあとの AdS/CFT の **GKP–ウィッテン関係式**へと自然につながる．

現在，量子重力の定式化は完全には解決していないが，

$$Z = \int \mathcal{D}g\, e^{i\mathcal{S}_L[g]} \tag{3.26}$$

のような汎関数積分で与えられると考えるのが自然である．ここで，g は計量，$\mathcal{S}_L$ は重力理論の作用で，上の式は計量についての汎関数積分を模式的にあらわしている．ここでは $t_E = it$, $\mathcal{S}_E = -i\mathcal{S}_L$ としたユークリッド定式化で考える：

$$Z = \int \mathcal{D}g\, e^{-\mathcal{S}_E[g]} \ . \tag{3.27}$$

ユークリッド化したブラックホールでは時間方向の周期が自然に出てくるので，ブラックホールに統計力学的な分配関数を対応させ，Z をそのような分配関数としてみなすのが自然である．もっとも，発散の問題などがあり，この汎関数積分を正式にはどう実行すればいいのかは不明である．また，超弦理論は式 (3.27) 自体を評価するわけではない．いずれにせよ，半古典論的には，汎関数積分にもっとも寄与するのは，作用の極値，すなわち古典解で近似できるであろう（鞍点近似）．この近似の下で，

$$\boxed{Z \simeq e^{-\underline{\mathcal{S}_E}}} \tag{3.28}$$

ここで $\underline{\mathcal{S}_E}$ は，計量の古典解を代入した on-shell 作用である．このように計算した分配関数から，

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \ , \tag{3.29}$$

$$S_{BH} = \ln Z + \beta E \ , \tag{3.30}$$

などを使って熱力学量が計算できる．また，自由エネルギー F は $\underline{\mathcal{S}_{\rm E}} = \beta F$ で与えられる．

シュワルツシルド・ブラックホールに対して，ここでは実際の計算はおこなわないが，7.4 節でシュワルツシルド AdS_5 ブラックホールに対しておこなう．このようにして計算した Z をゲージ理論の分配関数と同定するのが，AdS/CFT である．

3.2.3　ブラックホール・エントロピーの起源について

ブラックホール・エントロピーは何をあらわしているのだろう？　以下みるように，この問いに答えるのは簡単ではないが，一般的なコメントをしておこう．

たとえば，太陽のエントロピーと言う場合，意味は明らかである．ある熱力学系が巨視的には同じ状態にみえても，微視的にはさまざまな状態をとりうる．エネルギーを複数の粒子で分配する仕方は，いろいろあるからである．エントロピーは，与えられた巨視的変数（たとえばエネルギー）に対して微視的状態がどれだけあるかを数える．このような場合分けの数は，一般に粒子数が多くなるほど多くなる．したがって，一般にエントロピーは粒子数に比例する．

そうすると，ブラックホール・エントロピーの場合，ブラックホールの微視的状態を数えていると推測される．ブラックホールの微視的状態は，次のようにして大ざっぱに見積もることができる[*4]．いま，粒子を 1 カ所にたくさん集めて，ブラックホールを作ることにしよう．エントロピーは粒子数に比例した．エントロピーをなるべく大きくするにはブラックホールを作る粒子数を多く，つまり軽い粒子から作ればよい．粒子の質量が自由に選べるのであれば，いくらでも軽い粒子を使うことでエントロピーはいくらでも大きくなりそうである．しかし，質量 m の粒子のコンプトン波長は，$\lambda \simeq \hbar/m$ 程度である．いま，我々は粒子を集めてブラックホールを作ろうとしているが，粒子をコンプトン波長程度より狭い領域に集めることはできない．とすると，どんな軽い粒子を使ってもよいわけではない．コンプトン波長がシュワルツシルド半径よりも大きな粒子では，そもそもブラックホールにはならないからである．したがって，軽い粒子といっても，最低でも $\hbar/m \simeq 2GM$ を満足するような質量は必要になる．とすると，この場合の粒子数は，

$$N_{max} \simeq \frac{M}{m} \simeq \frac{M}{\frac{\hbar}{2GM}} \simeq \frac{(GM)^2}{G\hbar} \simeq \frac{A}{G\hbar} \tag{3.31}$$

となり，ちょうどブラックホール・エントロピー程度の数になる．

これは大ざっぱな見積もりとしてはよいが，どうすればちゃんとブラックホール・エントロピーを統計力学的に導出できるだろう？　ブラックホール・エントロピーの式 (3.20) の分母には，プランク長さ $l_{\rm pl}$ があらわれる．このため，ブ

*4)　以下の議論は，文献 [6] を単純化したものである．

ラックホール・エントロピーを説明するには，本質的に量子重力理論が必要だと考えられる．しかし，量子重力理論の定式化は困難な問題で，いまだに完全な決着はついていない．このためブラックホール・エントロピーの問題も，いまだに完全には決着していない．ただし，超弦理論は量子重力も含めた統一理論の最有力候補であり，ブラックホール・エントロピーの問題についてもある程度成功を収めている[7]．

3.2.2 節では，ブラックホール・エントロピーの半古典論的計算を紹介した．このような計算から，ブラックホール・エントロピーを導出できるのは自然であり，また単なる偶然とは考えにくい．なにかこの計算を正当化できるものが背後にあると思われる．しかしながら，これがブラックホール・エントロピーの微視的導出か，すなわち統計力学的な意味での導出かと問われれば，不満足と言って差しつかえないだろう．そもそも，式 (3.27) そのものは well-defined ではなく，実際に半古典論的近似を超えて評価することはできない．また，ブラックホール・エントロピーが何の自由度に相当するのかも明らかではない．

しかし，AdS/CFT はこの半古典論的な計算に対して，興味深い解釈を与える．AdS/CFT では，このように計算した分配関数をゲージ理論の分配関数として同定する．AdS/CFT は 2 つの理論の等価性を主張するので，(1) ゲージ理論について知るために重力理論を使うという立場と，(2) 重力理論について知るためにゲージ理論を使うという立場がありうる．どちらがより基本的な理論かという問題は，なかなか難しい問題だが，ここでは後者の立場をとってみよう．すると，AdS/CFT の立場では，ブラックホール・エントロピーの起源は，対応するゲージ理論のエントロピー，つまりゲージ理論の微視的状態数だと考えることができる．だとすれば，ブラックホール・エントロピーも通常の統計力学的なエントロピーにほかならない．

もっとも，AdS/CFT が扱うブラックホールは，AdS 時空中のブラックホールである．どのようなブラックホールについても（とくにシュワルツシルド・ブラックホールについても），このような解釈が可能かどうかは不明であるが，ホログラフィック原理はこのことを示唆する．

3.3 そのほかのブラックホール

3.3.1 高次元シュワルツシルド・ブラックホール

シュワルツシルド・ブラックホールは，一般の次元に拡張することができる：

$$ds_d^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \,, \tag{3.32}$$

$$f(r) = 1 - \frac{16\pi G_d}{(d-2)\Omega_{d-2}} \frac{M}{r^{d-3}} \,, \tag{3.33}$$

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \ . \tag{3.34}$$

G_d は d 次元時空のニュートン定数，Ω_n は S^n の面積でガンマ関数 $\Gamma(\frac{n+1}{2})$ で書ける．いくつかの Ω_n 値を挙げておくと，

$$\Omega_0 = 2 \ , \quad \Omega_1 = 2\pi \ , \quad \Omega_2 = 4\pi \ , \quad \Omega_3 = 2\pi^2 \ ,$$
$$\Omega_4 = \frac{8}{3}\pi^2 \ , \quad \Omega_5 = \pi^3 \ , \quad \Omega_6 = \frac{16}{15}\pi^3 \ , \quad \Omega_7 = \frac{1}{3}\pi^4 \ , \ldots \tag{3.35}$$

$f(r)$ の $1/r^{d-3}$ は，d 次元でニュートン・ポテンシャルが $1/r^{d-3}$ と振るまうことを反映している．

熱力学量は式 (3.20), (3.25) を使い，

$$T = \frac{f'(r_0)}{4\pi} = \frac{d-3}{4\pi r_0} \ , \tag{3.36}$$
$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4G} = \frac{r_0^{d-2}\Omega_{d-2}}{4G} \ . \tag{3.37}$$

3.3.2 荷電ブラックホール

これまで，もっとも簡単なブラックホール，シュワルツシルド・ブラックホールを考えてきたが，ブラックホールに電荷 Q をもたせることも可能である．これを**ライスナー–ノルドストリューム** (Reissner–Nordström) **・ブラックホール**と言う：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2 d\Omega_2^2 \tag{3.38}$$
$$= -\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2^2 \ . \tag{3.39}$$

$2GM = r_+ + r_-, Q^2 = r_+ r_-$ である．ライスナー–ノルドストリューム・ブラックホール（以下 RN ブラックホール）は，アインシュタイン–マクスウェル理論

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{-g}(R - F^2) \tag{3.40}$$

の解である．運動方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2 \ , \tag{3.41}$$
$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{3.42}$$

で与えられる．

ここでは，上の計量でマクスウェル方程式

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0 \tag{3.43}$$

だけを確認しておく．電荷をもつ場合は $F_{r0} = E_r \neq 0$ なので，非自明な式は $\partial_r(\sqrt{-g}F^{r0}) = 0$ だけである．上の計量で $F^{r0} = -F_{r0}$, $\sqrt{-g} = r^2 \sin^2 \theta$ となることを使うと，

$$F_{r0} = \frac{Q}{r^2} \tag{3.44}$$

が解である．$A_0 = -Q/r$ とゲージ・ポテンシャルを選ぶと，このような電場が得られる．

計量 (3.39) は，

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - Q^2} \tag{3.45}$$

で $g_{00}(r = r_\pm) = 0$ となり，2 つのホライズンをもつ．また，特異点は $r = 0$ である．ただし，

- $GM > Q$ の場合ホライズンがあるが，
- $GM < Q$ の場合，式 (3.45) が実数解をもたないのでホライズンがない．
- $GM = Q$，あるいは $r_+ = r_-$ の場合を**極限ブラックホール** (extreme black hole) と言う．

熱力学量は

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{G^2M^2 - Q^2}}{2GM\left(GM + \sqrt{G^2M^2 - Q^2}\right) - Q^2}\ , \tag{3.46}$$

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{4\pi r_+^2}{4G} = \frac{\pi}{G}\left(GM + \sqrt{G^2M^2 - Q^2}\right)^2 . \tag{3.47}$$

$GM > Q$ のブラックホールは，ホーキング放射で最終的に極限ブラックホールへと落ちつく．極限ブラックホールは温度 0 である[*5)]．

熱力学の第 3 法則によると，$T \to 0$ とともに $S \to 0$ である（ネルンスト–プランクの仮説）．一方，$GM \to Q$ でも RN ブラックホールのエントロピーは有限のままであり，第 3 法則を破っているようにみえる．この点については完全には解決していないが，議論になるのは，(1) 第 3 法則との整合性と，(2) そもそも極限 RN ブラックホールが本当に有限のエントロピーをもつのかという点である（極限のとり方に微妙な点がある）．まず (1) の点だが，$T = 0$ での有限のエントロピーは，基底状態が縮退していることを意味するが，基底状態の縮退自体は量子力学的に問題はない．しかし，このような縮退は理想化された場合にのみ正しく，縮退はさまざまな摂動によって一般に解けてしまう．同様

*5) 温度ゼロのブラックホールと聞くと，奇異に思えるかもしれない．と言うのは，温度は表面重力に比例するので，温度ゼロのブラックホールというのは表面重力がゼロということである．これは重力のないブラックホールということではない．さきに書いたように，表面重力は遠方の人が測った重力のことである．しかし遠方の人と，ホライズン近傍にいる人の間では重力赤方偏移の違いがある．このため，ホライズン近傍にいる人には重力が働いていても，遠方の人には重力が働いていないように見えるだけである．

に，RN ブラックホールの縮退も相互作用によって解けるのかもしれない．次に (2) の問題であるが，超弦理論を使って微視的状態の数え上げとして RN ブラックホールのエントロピーが導出されている [7]．そこでは縮退した基底状態を数えているので，極限ブラックホールは有限のエントロピーをもつという解釈と矛盾はない．

極限ライスナー–ノルドストリューム・ブラックホールの near-horizon 極限

極限ブラックホールのとき，ホライズン近傍の時空の様子はとくに興味深い．$r_+ = r_- = r_0$ のとき，計量 (3.39) は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2} + r^2 d\Omega_2^2 \ . \tag{3.48}$$

この計量はホライズン近傍 $r \to r_0$ で，

$$ds^2 \to -\frac{(r - r_0)^2}{r_0^2} dt^2 + r_0^2 \frac{dr^2}{(r - r_0)^2} + r_0^2 d\Omega_2^2 \tag{3.49}$$

$$= -\left(\frac{\tilde{r}}{r_0}\right)^2 dt^2 + r_0^2 \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2} + r_0^2 d\Omega_2^2 \ . \tag{3.50}$$

2 行目で座標変換 $\tilde{r} = r - r_0$ をおこなった．これは（あとで議論する）$AdS_2 \times S^2$ 時空にほかならない．このため，極限ライスナー–ノルドストリューム・ブラックホールと AdS/CFT の関係もしばしば議論されている．

第 4 章
強い相互作用とゲージ理論

これまでブラックホールについて説明したが，この章では AdS/CFT のもう 1 つ重要な要素であるゲージ理論について説明する．強い相互作用の理論である QCD とその相図，重イオン実験を概観したあとで，QCD から生まれた手法であるラージ N_c ゲージ理論を説明する．ラージ N_c ゲージ理論の考えは AdS/CFT へと自然につながる．

4.1 強い相互作用と QCD

4.1.1 QCD のあらまし

陽子や中性子は，**クォーク**と言う，より基本的な粒子からできている．しかし，クォークは通常は陽子や中性子のなかに閉じこめられており，ばらばらにとり出すことはできない．このクォークどうしを結びつけている力が，強い相互作用である．強い相互作用の理論は，**量子色力学** (QCD) によって記述される．QED は $U(1)$ ゲージ対称性に基づいた理論だが，QCD は $SU(3)$ ゲージ対称性に基づいている．強い相互作用の担い手は，$SU(3)$ ゲージ場である**グルーオン**である．

クォークは $SU(3)$ **基本表現**に属し，3 つの状態をとることができる．これを**カラー**の自由度と言い，量子色力学の「色」はここから来ている．カラーの自由度を添字 i であらわすと，クォークは q_i $(i = 1, 2, 3)$ とあらわすことができる*1)．反クォーク $\bar{q}^i$ は反カラーをもつ．電磁気力の源が電荷であるように，強い相互作用の源は「カラー電荷」である．

クォークはカラーをもつが，カラーはグルーオンとの相互作用により変わりうる．変化したカラーの違いは，グルーオンによって運ばれる．したがって，グルーオンはカラーと反カラーをもつことになる．グルーオンは，クォーク・反

*1) クォークは**フレーバー**と言う自由度ももち，アップ u，ダウン d，ストレンジ s，チャーム c，ボトム b，トップ t の 6 種類ある．

クォーク対 $\bar{q}^i q_j$ のように振るまうのである*2)．このため，グルーオンは，添字 (i,j) についての 3×3 行列 $(A_\mu)^i{}_j$ であらわされる．グルーオンは，$SU(3)$ **随伴表現**に属すると言うこともできる．

グルーオン自身がカラー電荷をもつので，グルーオンは自己相互作用をする．これは QED とは大きく異なる点で，電磁気力の担い手である光子自体は中性である．このことにより，QCD のダイナミクスは大きく変わる．

QCD は高エネルギーで相互作用が弱くなることが知られている（**漸近的自由**）．このため，深部非弾性散乱と呼ばれる高エネルギーでの実験結果と QCD を精度よく比較することができ，QCD が検証された．しかし，逆に言えば，低エネルギーでは相互作用が強くなるということである．このため，クォークやグルーオンは**ハドロン**と総称される粒子のなかに閉じこめられ，カラーが「無色」の組み合わせになる粒子しか観測されないと考えられている*3)．これを**カラーの閉じこめ**と言うが，いまだに完全には証明されていない．

QCD は，クォークの位相変換 $q \to e^{i\theta}q$ の下での不変性ももつ．これはバリオン数保存に伴う大域的な $U(1)_B$ 対称性である．

4.1.2 QCD の相構造

QCD は低エネルギーでは強結合で，摂動論が使えない．しかし，この状況は，逆に QCD では QED などよりずっと豊かな現象が期待できることを示唆する．実際，QCD は豊かな相構造をもつことが知られており，いまだに相構造の全体像は知られていない（図 4.1）*4)．この図で「ハドロン相」の部分が，クォークが閉じこめられている相である．

一方，高温では多数の軽い粒子が励起され，それらが邪魔してクォークどうしに働く力が弱められる．これは電磁気学でも知られた**デバイ遮蔽**と呼ばれる現象である*5)．この効果で非閉じこめが起きた相が，**クォーク・グルーオン・プラズマ** (QGP) である*6)．これをプラズマと言うのは，通常の電磁気学的なプラズマ同様，イオン化した「荷電」粒子からできているからである．ただし，クォーク・グルーオン・プラズマの場合，荷電粒子と言っても，カラー電荷についての荷電粒子だという点が違う.（もちろん，クォークは通常の電荷ももっているが，それはここでは重要ではない.）クォーク・グルーオン・プラズマへの転移は，$T_c \approx 150-200\text{MeV} \approx 1\text{fm} \approx 2\times 10^{12}\text{K}$ 程度と見積もられてい

*2) これはグルーオンがクォーク・反クォーク対だという意味ではない．変換性が同じだというにすぎない．

*3) 正確には，カラー 1 重項の粒子と言うべきである．

*4) このような豊かな相構造は QCD に限られているわけではなく，ヤン–ミルズ・ゲージ理論に典型的である．ラージ N_c ゲージ理論でもおいおい議論するように，一般に複雑な相構造をもつようである．

*5) ただし QCD の場合，遮蔽されるのは電荷ではなく「カラー電荷」であり，その結果として強い相互作用が弱まる．

*6) QGP の教科書としては，文献 [9] がある．

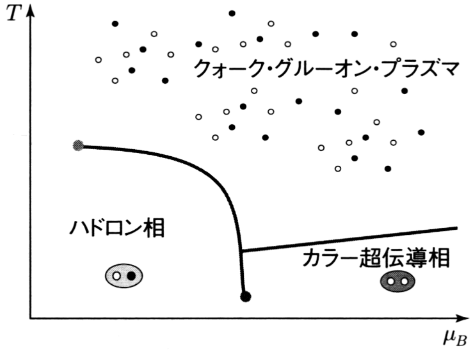


図 4.1 QCD の相図[8]．縦軸は温度，横軸はバリオン数保存に伴う化学ポテンシャル（9.2 節）．これは模式図であり，ほかの相の存在の可能性についても相の境界についても，わかっていないことが多い．

る．ただし，格子数値計算によると，バリオン数化学ポテンシャルがゼロの場合，これは相転移ではなく，なめらかなクロスオーバーだと考えられている．

プラズマ相では非閉じこめが起こっているので，一見すると摂動論が有効だと思われがちである．たしかに，十分な高温ではこのプラズマは自由ガスのように振るまう．しかし，現在の実験で実現しようとしている温度では，相互作用は十分に弱くはならない．なぜなら QCD の結合定数は，エネルギーについて対数的に弱くなるだけだからである ($1/\log E$)．実際，プラズマ相でも QCD が強く相互作用をしている実験的な根拠もある（4.1.4 節）．このためプラズマの性質を理論的に議論したくても，摂動論的 QCD の有効性はやはり限られている．そこで，やはり違う手段が求められている*7)．

4.1.3 重イオン実験

クォーク・グルーオン・プラズマ相の存在は，理論的には以前から知られていた．しかし，このプラズマは実験で創り出されたことがなかったものであり，ましてやその物理的性質など測られたことはなかった．しかし，近年このプラズマを実現して物理的性質を測ろうという**重イオン実験**が世界各地でおこなわれている．

通常の加速器では，電子と陽電子，陽子と反陽子，あるいは陽子どうしを衝突させるが，重イオン実験の大きな特徴は，金原子核のような重い原子核どうしを衝突させる点である．なお，原子自体は中性なので，加速させるには電子をはぎとってイオン化する必要がある．このため，この種の実験を重イオン実験と言う．

*7) なお，強結合で有用な手法としては格子数値計算があり，コンピュータの発達などから近年とくに有力になってきている．しかし，実時間形式ではなく虚時間形式であることから，この手法は平衡状態のような定常的な問題には強力だが，RHIC 実験のような非定常的な問題は不得意としている．また，有限密度での解析も難しい．

代表的な重イオン実験としては，2000 年から本格運転が開始されたブルックヘブン国立研究所の相対論的重イオン衝突型加速器**RHIC**（リック） (Relativistic Heavy Ion Collider) と呼ばれる加速器を使った実験がある．2010 年からは，セルンの **LHC** (Large Hadron Collider) でも重イオン実験がおこなわれている．RHIC では $2T_c$，LHC では $5T_c$ 程度の温度のプラズマが達成できると見積もられている．

重イオン実験では，まず重原子核が衝突を起こし，十分高温であれば，ごく短時間クォーク・グルーオン・プラズマが生成される．しかし，このプラズマは膨張し，冷えていく．最終的には，転移温度以下になりハドロン化を起こす．観測されるのは，これら多数のハドロンである．このことから，重イオン実験の実験および解析の難しさが浮き彫りになる：

- プラズマが複雑な時間発展をするので，解析は容易ではない．
- 観測されるのはプラズマそのものではない．副産物のハドロンなどであり，それら副産物から遡って何が起きたか突きとめなければいけない．したがって，そもそもプラズマの生成が起こったかどうかを知るのさえ容易ではない．
- 実験には多数の粒子が関与する．ここでの目的は熱力学系としてのプラズマ全体の性質なので，できる限りもれなく生成された粒子を追跡する必要がある．
- しかも，以下議論するように理論的な解析のうえで摂動論が有効であると考えられない．

4.1.4 「超弦理論との予期せぬつながり」

2005 年，RHIC の最初のまとまった実験結果が報告され，マスコミでも大きな話題になった．このプレスリリースには，一風変わったコメントが載っていた[10]：「超弦理論と RHIC 実験の間の予期せぬつながりには心が躍った．」*8) ここで言う超弦理論とは，AdS/CFT のことを指す．実験に関わった人々をも驚かせた AdS/CFT と RHIC 実験の予期せぬつながりとは，何のことだろう？

RHIC の発表によると，**このプラズマが「理想気体」というよりもむしろ「完全流体」のように振るまう**という点が強調された．理想気体と完全流体の違いは，後者が粘性をもたない点である．粘性や流体力学については，9 章で本格的に扱うが，ここでは粘性について簡単に復習しておく．

いま 2 つの板の間に流体があるとして，上の板を動かす（図 4.2）．すると，流体全体が引きずられ，下の板にも力がかかる．この力こそ粘性の効果である．いまの場合，下の板にかかる単位面積あたりの力 F/A は，上の板を動かす速度 v に比例し，流体の厚み L に反比例する：

---

*8) 大型実験のプレスリリースで超弦理論が言及されたのは，これが史上初だったと思われる．

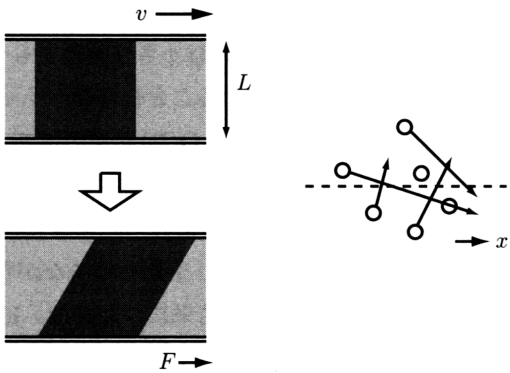


図 4.2 上の板を動かすと，粘性によって流体全体が引きずられる．このため下の板にも力がかかる．右の図は流体の一部を拡大したもの．

$$\boxed{\frac{F}{A} = \eta\frac{v}{L}} \tag{4.1}$$

比例係数 η は**ずり粘性率**と呼ばれる．

微視的には，粘性は分子間の運動量の輸送によって起きている．図 4.2（右）は流体の一部を拡大したもので，人工的に上の部分と下の部分に分けたものだ．流体を構成する分子は互いに衝突をくり返しながら，絶えずこの境界を行き来している．ところで，上の板を動かすといういまの状況では，平均すると，上部の分子の方が下部の分子より x 方向の運動量をより多くもっている．そのような分子が交換されるということは，つまり x 方向の運動量が境界を越えて輸送されることを意味している．これが粘性の微視的な原因である．

式 (4.1) からわかるように，ずり粘性率は $[\eta] = \mathrm{Pa \cdot s} = \mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$ の次元をもつ．したがって，次元解析より，

$$\eta \simeq \rho\,\bar{v}\,l_{\mathrm{mfp}} \simeq \varepsilon\tau_{\mathrm{mfp}} \tag{4.2}$$

となることが期待される（ρ：質量密度，$\bar{v}$：流体を構成する粒子の平均速度，l_{mfp}：平均自由行程，ε：エネルギー密度，τ_{mfp}：平均自由時間）．これから一つわかることは，相互作用と粘性の関係である．相互作用が強くなると，平均自由行程は短くなる．粘性は運動量の輸送によって起こったが，相互作用が強いと輸送が妨げられるためである．だから相互作用が強ければ，粘性は小さくなる．とくに完全流体は粘性をもたないので，これは相互作用が極端に強いことを示唆する．この点少し紛らわしいが，理想気体は相互作用がない極限であり，逆に完全流体は相互作用が強い極限である*9)．

---

*9) 以上の議論は，流体一般に成りたつものではない．(a) 式 (4.1) を満たす流体（ニュートン流体），かつ (b) 本文にあるような方法で運動量輸送が起こる流体に限られる．たとえばハチミツはどちらの仮定も満たさない．

このように小さな粘性は，相互作用が強く働いていることを示唆する．RHICの発表によると，QGPは小さな粘性をもつということなので，QCDの相互作用はまだ強く働いていることになる．もっともそうなると，QGPの性質を理論的に議論したくても，QCDの摂動論を使うわけにはいかない．これがQGP研究のやっかいな点である．そこで登場するのがAdS/CFTである．RHIC実験の結果は，AdS/CFTを使ったずり粘性率の予言と近いことが判明したのである（11章）．これが「予期せぬつながり」である．

重イオン実験とその結果については，11.2節でさらに議論する．

4.2 ラージ N_c ゲージ理論

QCDは摂動論の使える領域が限られており，いまだにQCDを非摂動論的に解くのは困難である．このため近似手法として提案されたのが，トホーフトの**ラージ N_c ゲージ理論**という考えである[11]．そして，この考えが弦理論と関係する．

QCDではカラーの自由度は3だが，ラージ N_c ゲージ理論ではカラーの数 N_c が大きい場合を考える．たとえば，仮想的な $U(N_c)$ ゲージ理論を考える．この場合，ゲージ場 $(A_\mu)^i{}_j$ は $N_c \times N_c$ 行列であらわされる．

したがって，この理論には2つのパラメータがあることになる：

$$\text{ゲージ理論の結合定数 } g_{\mathrm{YM}}, \qquad \text{カラーの数 } N_c\,.$$

以下では，独立なパラメータとして，かわりに N_c と**トホーフト結合定数** $\lambda := g_{\mathrm{YM}}^2 N_c$ を使う．ここで，

$$\lambda \text{ を大きな値に固定しつつ，} N_c \to \infty$$

という極限をとる操作を**ラージ N_c 極限**と言う*10)．以下みるように，これはノントリビアルな極限である．つまり，この極限で理論は自由場には帰着しない．実は，有効結合定数が λ であらわされるからである．したがって，$\lambda \gg 1$ のときは，むしろ強結合極限である．

物性などでは，しばしば $O(N)$ ベクトル模型のラージ N 極限を考える．ラージ N_c ゲージ理論も考え方は同じであるが，大きな違いもある．ベクトル模型はこの極限で解けるが，ゲージ理論はこの極限でも解くのは難しい．ラージ N では，ベクトル模型は本質的に古典論に帰着する．ゲージ理論も古典論には帰着するが，以下でみるようにそれは古典論と言っても古典重力理論である．

ファインマン・ダイアグラムでは，ゲージ場のプロパゲーターを1本の線であらわすが，カラーの自由度を見やすくするために，図4.3のように矢印つき

*10） g_{YM} を復活させると，$g_{\mathrm{YM}} \to 0$ も意味する．

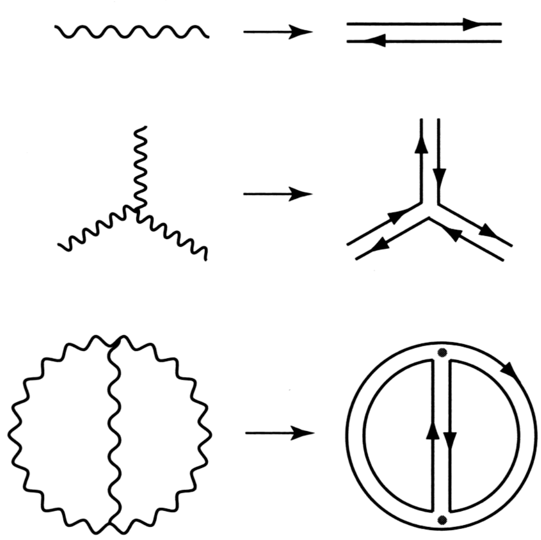


図 4.3　ゲージ場のプロパゲーター（波線）と相互作用の頂点を double-line notation で描いたもの（上，中）と，真空ダイアグラムの一例（下図）．

の二重線で書くのが便利である (“double-line notation”)．そして，全体として矢印の向きが保たれるようにダイアグラムを書く．カラーの添字に関する限り，ゲージ場はクォーク・反クォークのように振るまうので，二重線をクォーク・反クォークとみなすこともできる．つまり，片方の線が行列 $(A_\mu)^i{}_j$ の行，もう片方が列をあらわしている．

または，弦理論の文脈では，これは開弦が伝搬している様子にほかならない（5 章）．二重線が開弦の端なのである．開弦は，ゲージ場をあらわすからである*11)．

ゲージ場のラグランジアンは，形式的に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}\{\partial A \partial A + A^2 \partial A + A^4\} = \frac{N_c}{\lambda}\{\cdots\} \tag{4.3}$$

と書ける．このようなラグランジアンから，場の理論を使って振幅を求めるためのファインマン・ルールが導けるが，ルールだけをまとめると以下のようになる：

- プロパゲーターには，λ/N_c の因子を付与する．
- 相互作用をあらわす「頂点」*12) には，N_c/λ の因子．
- 「ループ」には N_c の因子（N_c の自由度があるため）．

このため，頂点の数を V，プロパゲーターの数を E，ループの数を F とすると，

*11)　以下，ラージ N_c 極限でまた弦理論が登場するが，この開弦と以下で登場する弦理論は，同じものではない．以下で登場する弦理論は，閉弦の理論だからである．

*12)　図 4.4 ではグレーの丸であらわした．なお，以下ではダイアグラムの λ と N_c の因子だけに注意し,「外線」をもたない「真空ダイアグラム」だけを考える．

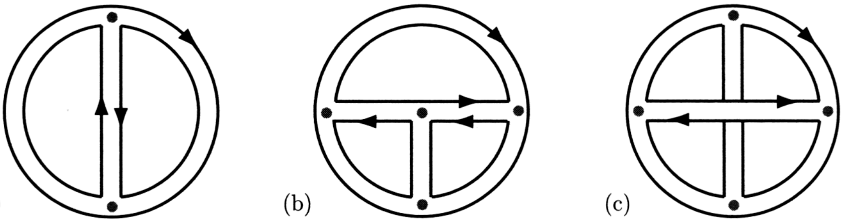


図 4.4　真空ダイアグラムの例．(a), (b) はプラナー・ダイアグラムで，(c) は非プラナー・ダイアグラム．

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^E N_c^F = \lambda^{E-V} N_c^{V-E+F} \tag{4.4}$$

となる．たとえば，図 4.4 (a) のダイアグラムは $(V, E, F) = (2, 3, 3)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^3 N_c^3 = \lambda N_c^2 \ . \tag{4.5}$$

図 4.4 (b) のダイアグラムは $(V, E, F) = (4, 6, 4)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 N_c^4 = \lambda^2 N_c^2 \ . \tag{4.6}$$

したがって，これらのダイアグラムは形式的に

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots) N_c^2 = f_0(\lambda) N_c^2 \tag{4.7}$$

という形にまとまる．

しかし，ダイアグラムはいつも式 (4.7) の形をとるわけではない．たとえば，図 4.4 (c) のダイアグラムは $(V, E, F) = (4, 6, 2)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 N_c^2 = \lambda^2 \tag{4.8}$$

となる．図 4.4 (a), (b) のようなダイアグラムを**プラナー** (planar) と言い，図 4.4 (c) のようなダイアグラムを**非プラナー** (non-planar) と言う．プラナー（非プラナー）とは，平面上に書ける（書けない）という意味である．非プラナー・ダイアグラムも含めると，ダイアグラムは

$$f_0(\lambda) N_c^2 + f_1(\lambda) N_c^0 + f_2(\lambda) \frac{1}{N_c^2} + \cdots \tag{4.9}$$

という形にまとまる．ラージ N_c 極限では，式 (4.9) の第 1 項，プラナー・ダイアグラムが支配的になる．

ダイアグラムが平面上（あるいは球面上）に書けるかどうかで，ラージ N_c 極限で支配的になるかどうかが決まるというのは，ダイアグラムとトポロジーの関係を示唆する．実際，図 4.4 (c) はトーラス上には書くことができる[*13]．

*13)　これを絵に描くのは，筆者の画力に余るし，見にくい絵になるだけである．読者自らが絵を描いてみるか，実際にハンドルをもつ物体上にダイアグラムを描いてみるのがいい．

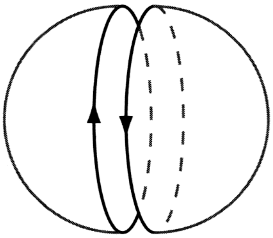


図 4.5 ダイアグラムと 2 次元面の関係.

一般には次のように考える．いま，プロパゲーターを辺として，ループを面で埋めると，2 次元面ができる（図 4.5）．つまり，2 次元面を（頂点で交わる）辺で分割した図形ができる．こう考えた場合，プロパゲーターの数 E，ループの数 F は，それぞれ 2 次元面の辺の数，面の数という意味をもつ．しかし，2 次元面としてみた場合，式 (4.4) にあらわれる N_c のベキはオイラー標数 χ であり，トポロジカル不変量である：

$$\chi = V - E + F \ . \tag{4.10}$$

たとえば，球は $\chi = 2$，トーラスは $\chi = 0$ である．ハンドルの数（ジーナス）を h とすると，$\chi = 2 - 2h$ と書くこともできる．

真空ダイアグラムの足しあげは分配関数なので，

$$\ln Z_{\text{ゲージ}} = \sum_{h=0}^{\infty} N_c^{\chi} f_h(\lambda) \tag{4.11}$$

となる．したがって，

ラージ N_c 極限では，分配関数は 2 次元面のトポロジーの足しあげとしてあらわされる.

図 4.4 (a), (b) を比べてわかるように，プロパゲーターが多いほど，ラージ λ で支配的になる．この極限は場の理論的には評価が難しい．一方，この極限でプロパゲーターはますます密になり，なめらかな 2 次元面により近づくと期待される．

次章で詳しく説明するが，実は弦理論の摂動展開も，2 次元面のトポロジーの足しあげとしてあらわされる（図 5.11）．したがって，実は 2 つの理論は同等であり，2 つの分配関数も等価だと考えられる：

$$Z_{\text{ゲージ}} = Z_{\text{ストリング}} \ . \tag{4.12}$$

とくに，閉じた 2 次元面の足しあげは，重力の摂動展開に相当し，プラナー・ダイアグラムの球は古典重力，非プラナー・ダイアグラムのトーラスは重力の 1 ループに相当する．

これが AdS/CFT への第一歩である．

第 5 章
AdS/CFT へと至る道のり

この章では，超弦理論の初歩を説明しつつ，AdS/CFT へと至った歴史的な道のりを解説する．超弦理論とゲージ理論の関係については，長年にわたって議論されたが，AdS/CFT はその「宿題」をある程度解決した．

この章の読み方については，注意がある．

1. ここでの議論は厳密にできるものではないので，読者にとっては消化不良になる面もあるかもしれない．
2. また，AdS/CFT へと至る道のりは紆余曲折しており，わかりにくい点もあるかもしれない．
3. ある程度議論に超弦理論が必要になる．超弦理論をなるべく直観的に説明しつつ議論を進めるが，読者にとっては負担かもしれない．

幸いなことに，AdS/CFT の計算そのものでは，超弦理論自体を使うことはあまりない．したがって，**まず計算方法を知るだけなら，この章はあまり気にする必要はない**．にもかかわらず，この章を含める理由は，

1. AdS/CFT に至る道のりをたどることで，なぜ 4 次元のゲージ理論と 5 次元の重力理論という，次元も違えば理論もまったく違ってみえる 2 つが対応しうるか，を知る動機づけになる．
2. そもそも超弦理論は強い相互作用の理論として生まれたが，当時のアプローチにはいろいろな問題もあった．AdS/CFT がそれらの問題をどう回避しているのかを理解できる．

5.1 超弦理論前史

強い相互作用は最終的に QCD によって記述されたが，それ以前に強い相互作用をあらわす理論として生まれたのが，弦理論である．

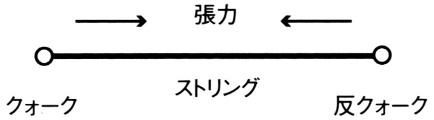


図 5.1　ストリングを使ったメソンのモデル.

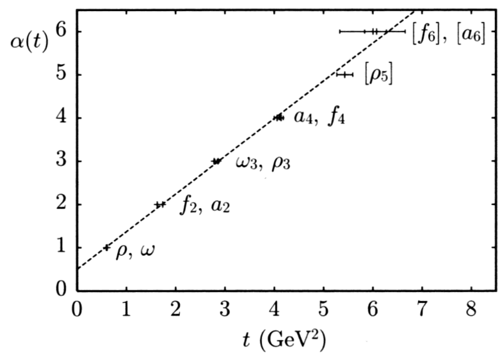


図 5.2　レッジェ軌跡の例. 横軸は M^2, 縦軸はスピンをあらわす. 角カッコの粒子については, あまりよくわかっていない. 直線は式 (5.2) を使ってフィットしたもの.（文献 [12] より許可を受けて再掲.）

たとえば, クォークと反クォークでできた**メソン**は, クォーク対をつなぐ「ストリング」でうまくあらわすことができる（図 5.1）. このストリングは張力をもっている. したがって, クォーク対を引き離すには, ストリングの長さ $\mathcal{R}$ に比例したエネルギー $E \propto \mathcal{R}$ が必要になり, クォークを単独でとり出すことはできない. ストリングに注入したエネルギーが十分大きくなると, 中間にクォークと反クォークが対生成される. しかし, 1 本のストリングが 2 本にちぎれてしまうだけで, ストリングの端点にはやはりクォークがついているという意味で, クォークを単独でとり出すことはできない.

ストリングは張力をもっているため, そのままでは一点につぶれてしまう. 一点につぶれないようにするには, ストリングを振動させる必要がある. あるいは,（振動させるというのと実は同じことなのだが）回転すれば張力と遠心力がつり合って, 安定に存在することができる. 相対論的なストリングの運動方程式を解くと, このようなストリングの角運動量はストリングのエネルギーの二乗に比例する：

$$J = \alpha' M^2 + \alpha(0)\ . \tag{5.1}$$

この関係を**レッジェ軌跡** (Regge trajectory) と言う.

メソンのスペクトルは, たしかにこのような関係を満たすことが知られている. 図 5.2 は, 代表的なメソンに対してレッジェ軌跡を描いたものである*1). パイオンはメソンの代表格だが, u, d のクォーク・反クォーク対からなる. ρ

*1)　この種の図を Chew–Frautschi プロットと言う [13].

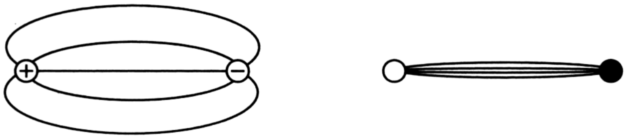


図 5.3 電磁気学の力線（左）と違い，QCD の力線はフラックスチューブをなす（右）．

メソンも同じである．ただし，パイオンがスピン 0（スカラーメソン）であるのに対し，ρ メソンはスピン 1（ベクトルメソン）であり，より重い．さらに，ρ メソンと同じような性質をもち，より大きなスピン・質量をもつ一群のメソンがある．これらは 1 つのレッジェ軌跡上に並び*2)，

$$\alpha' \approx 0.9\ \mathrm{GeV}^{-2}\ , \qquad \alpha(0) \approx 0.5\ , \tag{5.2}$$

とすると，これらメソンのスペクトルとよく一致する．

また，QCD が登場したと言っても，QCD は強い相互作用としての超弦理論と相いれないものではない．通常の力線は空間的に広がっていく（図 5.3）．しかし，QCD の場合，グルーオンが自己相互作用をもつため，クォーク・反クォーク間の力線は拡がらず**フラックス・チューブ**をなすと考えられている．少なくとも，このフラックス・チューブの太さが無視できる場合は，メソンのストリング模型に帰着すると考えるのは自然である．

このように，強い相互作用の物理と超弦理論はうまく対応するが，多くの問題もあった．とくに

問題 1 ストリングを矛盾なく量子化するには，高次元時空が要求される．ボゾンだけのストリングの場合は 26 次元時空，フェルミオンも含んだ超弦理論は 10 次元時空ではないと無矛盾ではない．

問題 2 クォークをつなぐストリングとして閉じこめは記述できたが，QCD で出てくるのは閉じこめポテンシャルだけではない．クォーク間の距離が小さくなれば，フラックス・チューブの太さが無視できなくなり，通常の力線に似てくる．その結果として，ポテンシャルはクーロン型になる ($E \propto -1/\mathcal{R}$)．しかし，単純なストリング模型では，この効果は記述できそうにない．またプラズマ相では，熱的に励起されたクォーク・反クォーク対によって，ストリングがちぎれやすくなってデバイ遮蔽が起こる．ここでもやはり，ストリングによる記述は適切ではなくなるように思える．つまり，ストリング模型は閉じこめのモデルにすぎないように思える．超弦理論がたしかに QCD をあらわすのなら，相図の全体が議論できるべきであろう．

問題 1 については 5.3 節，問題 2 については 8.2 節で再度検討することに

*2) 正確には，これは単一の軌跡ではなく，ほかの量子数の違いによって分けられる 4 つの「縮退した」軌跡をあらわしている．なお，ω メソンは $s\bar{s}$ を含むが，ストレンジネス，チャーム，ボトム等の量子数をもたない点は同じである．

物質：	クォーク 6 種類	
	レプトン 6 種類	
相互作用：	重力	一般相対論（古典論）
	電磁気力	ゲージ理論（量子論）
	弱い力	
	強い力	
ヒッグス粒子		

図 5.4 素粒子の標準模型．

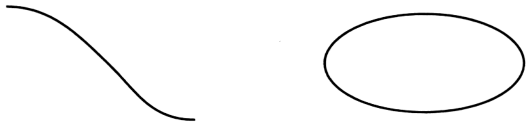


図 5.5 超弦理論の主な登場人物．端のあるストリング（開弦）とループ状のストリング（閉弦）．

する．

このような問題から，強い相互作用と弦理論の対応には，明らかになにか欠けた点があった．また，QCD が提唱され，強い相互作用の正しい理論だという実験結果も集まり，強い相互作用の理論としての弦理論はいったんは放棄された．むしろ，弦理論は重力も含めた統一理論として再出発することになった．そこで，次に統一理論としての弦理論を簡単にみていくことにしよう．

5.2 統一理論としての弦理論

図 5.4 は，素粒子の標準模型の構成要素を描いたものである．物質を作り上げる素粒子は，クォークとレプトンで，それらの粒子には 4 種類の力が働いている．原理的には，すべての現象はこれらの要素で理解できるが，標準模型にはさまざまな欠点もある．これらの欠点について，詳しくは述べないが，欠点を一言で言えば，まとまりがないということに尽きる．

この点顕著なのが，相互作用の部分である．重力以外の 3 つの力はゲージ理論によって記述され，これは量子化が可能である．一方，重力は一般相対論によって記述される古典論であり，一般相対論の量子化には誰も成功していない．したがって，これらの力は，その理論的な基礎や概念が大きく異なる．超弦理論は，これらまとまりがない要素をまとめあげることができる．

5.2.1 ストリングの振動と素粒子

超弦理論での基本的な物体は，伸び縮みするきわめて小さい長さのストリングである（図 5.5）．ストリングには，端点をもった**開弦**と，端点をもたない**閉弦**の 2 種類がある．これらのストリングはきわめて小さく，10^{-34} メートル程

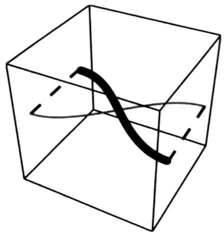


図 5.6 開弦のもっとも単純な振動. 太線の開弦が半周期後にグレーの線の形をとる. 「箱」は単に 3 次元での振動を見やすくするために描いたものである.

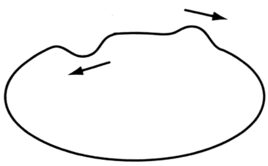


図 5.7 閉弦では, 2 つの独立な進行波がある. これはグラビトンのもつスピン 2 の性質と一致する.

度と考えられている. これに対して, 現在実験で「見る」ことができる長さはせいぜい 10^{-17} メートル程度にすぎない. このため巨視的にはストリングは素粒子とみなせる. ストリングの典型的な長さを**ストリング長さ**と呼び, l_s であらわす. 超弦理論の基礎的なスケールは, l_s だけである (8.3 節).

しかし, どんなに小さくても, ストリングと粒子には決定的な違いがある. それは「ストリングは振動できる」という点である. そしてこの点こそが, 超弦理論の利点である. 素粒子論ではさまざまな素粒子が登場する. 超弦理論では, これらの素粒子はすべてストリングで統一的に理解される. ストリングはいろいろな形で振動できるが, さまざまな素粒子はストリングのさまざまな振動として解釈する.

具体的にストリングの振動の様子を見てみよう. まず開弦の振動を考える. 図 5.6 は, 開弦の一番単純な振動をえがいたものである (4 次元時空の場合). ストリングは振動しているが, 振動する方向には 2 つある. これはゲージ場 (光子) の 2 つの偏光状態をあらわす. この意味で, 開弦はゲージ理論をあらわす.

では, 閉弦はどんな粒子をあらわしているのだろう？　進行波の進む方向には, 時計回りと反時計回りの 2 通りがある (図 5.7). 端がある場合, 端でこの 2 つは混じりあってしまう. しかし, 閉弦では端がないので, この 2 つは独立である. このため, たとえば時計回りの波を上下方向に振動させて, 反時計回りの波はそれとは違う方向に振動させることができる. つまり, 閉弦は, 同時に 2 つの方向に振動できる.

これは, ちょうど重力場 (グラビトン) の性質と一致する. 重力場の「偏光」については, ややなじみが薄いかもしれないが, 重力場も同時に 2 つの方向に

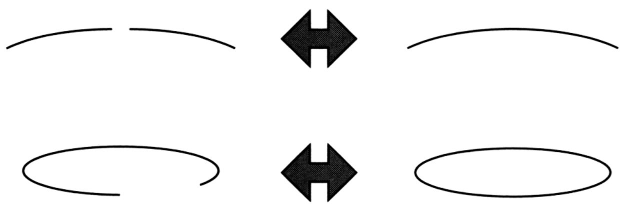


図 5.8 開弦のもっとも簡単な相互作用は，開弦が 1 つにくっつくことである（上の図）．そうであれば，1 つの開弦の端点どうしもくっついて閉弦になるはずである（下の図）．

振動しており，この性質をスピン 2 と言う*3)．

5.2.2 なぜ閉弦と開弦があるのか？

超弦理論では，一般に開弦と閉弦，2 種類のストリングがある．なぜ 2 種類あるのだろう？　あるいは，超弦理論は 2 種類のストリングがいるので統一されていないではないか，と思われるかもしれない．しかし，実際にはこれらはある意味同じ物体である．これをみるためには，ストリングの相互作用を考える必要がある．

図 5.8 は開弦のもっとも簡単な相互作用である．2 つの開弦が 1 つにくっつく．しかし，2 つの開弦の端点がくっつくのであれば，1 つの開弦の端点どうしもくっつくはずである．そうでなければ，ストリングのダイナミクスに非局所的な拘束を置くことになってしまう．したがって，1 つの開弦の端点はくっつくことができて，閉弦を作り出すはずである．つまり，開弦があると，閉弦もなければいけない．2 種類のストリングがあるのはこのためである*4)．

開弦はゲージ理論，閉弦は重力をあらわすのだから，超弦理論はゲージ理論も重力理論も含まなければいけないことになる．これは，統一理論としての超弦理論のユニークな点である．

この統一理論としての超弦理論の利点が顕著に出ている例が，AdS/CFT である．AdS/CFT は，ゲージ理論と重力理論が等価だと主張する．これはゲージ理論と重力理論を統一する超弦理論だからこそ，可能になった考えである．通常の場の理論では，この 2 つは理論的な基礎や概念が大きく異なるので，このような関係は望むべくもない．

AdS/CFT の背後には，“big picture” がある．すなわち，AdS/CFT は背後に統一理論の存在を要求しているのである．

---

*3) 正しくは，閉弦のもっとも単純な振動は，グラビトンと，未発見のスカラー粒子，ディラトンとアクシオンをあらわす．光の場合，振動の可能性は 2 通りだった．いまの場合は，それぞれの進行波が 2 通りの方向に振動できる．したがって，合計すると 4 通りの振動がある．グラビトンの自由度は 2 つなので，2 つのスカラー粒子とあわせ，粒子の描像でも合計して 4 つの自由度があることになる．

*4) 閉弦だけの超弦理論も考えることができるが，本書では議論しない．

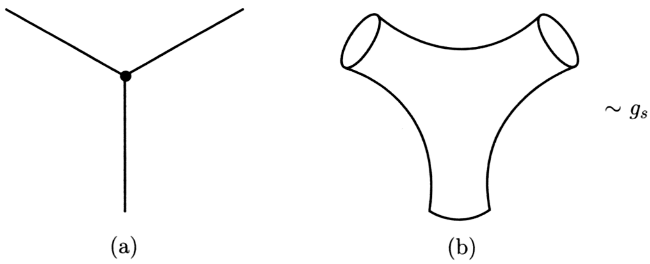


図 5.9　(a) 相互作用をあらわすファインマン・ダイアグラムの頂点．(b) 対応する閉弦の相互作用．

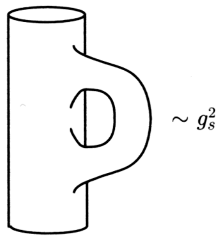


図 5.10　閉弦の 1 ループ．

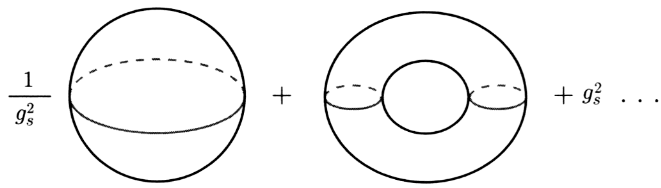


図 5.11　弦理論の摂動展開は，トポロジーの足しあげとしてあらわされる．

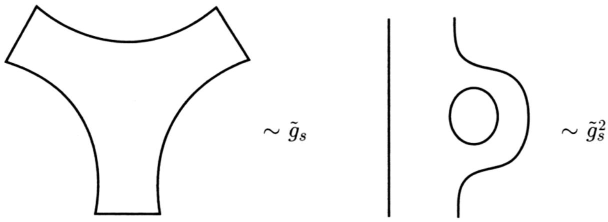
5.2.3　弦の相互作用

粒子は時空中で世界線を掃く．同様に，ストリングは 2 次元面，**世界面** (worldsheet) を掃く．図 5.9 (a) は，粒子の相互作用をあらわすファインマン・ダイアグラムの頂点を描いたものである．このような相互作用は，閉弦の場合図 5.9 (b) のようになる．

この相互作用の強さをあらわすのに，閉弦の放出・吸収のプロセスに**ストリング結合定数** g_s の因子を付与することにする．粒子の 1 ループに相当するのは図 5.10 であり，これは g_s^2 に比例する．図 5.10 は「ハンドル」が 1 つあるので，ハンドル 1 つあたり g_s^2 を割りあてると言ってもよい．ループの数がもう 1 つ増えると，ハンドルがさらに 1 つ増え，g_s^4 となる*5)．

結局，ストリングの相互作用はトポロジーで分類できることになる（図 5.11）．ハンドルの数（ジーナス）h を使うと，h ループは g_s^{2h} となる．ジーナスはオ

*5)　しばしば，簡単のために真空ダイアグラムだけが登場するが，適当な外線を加えて散乱振幅と考えてもいい．なお，この段階では g_s は理論のパラメータのようにみえるが，実はそうではない（5.2.4 節）．



(a) 開弦の相互作用　　(b) 開弦の 1 ループ

図 5.12

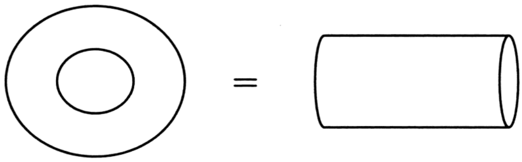


図 5.13　開弦の 1 ループは，変形すると閉弦 1 つの放出とみなせる．

イラー標数 χ と $\chi = 2 - 2h$ の関係があるので，真空ダイアグラムをオイラー数で $1/g_s^\chi$ と書くこともできる*6)．

開弦についても同様である．開弦の分岐に対し $\tilde{g}_s$ の因子を付与すると，開いた 2 次元面のトポロジーで分類できる（図 5.12）．しかし，開弦と閉弦両方考える場合，この 2 つの相互作用には関係があることを念頭に置く必要がある．実際，開弦の 1 ループは，変形すると閉弦 1 つの放出とみなせるから（図 5.13），

$$g_s \simeq \tilde{g}_s^2 \tag{5.3}$$

の関係が成りたつ．

5.2.4　超弦理論の古典重力近似：超重力理論

ストリングのもっとも単純な振動から，ゲージ場やグラビトンが出てくることをみたが，弦の固有振動は無限にあるので，超弦理論は無限個の素粒子の存在を予言することになる．もっとも，ストリングが振動すると，振動はエネルギーをもつので，巨視的には振動のエネルギー分の質量をもつ素粒子としてみえる．この質量は，典型的には $O(1/l_s)$ という素粒子としてはたいへん重い質量をもつ．このため，通常もっとも低い振動のみが重要になる．これらが通常知られている素粒子である．

このように弦の広がり l_s が十分に小さいとみなせるときは，超弦理論は少数の知られている素粒子であらわされるので，ふつうの場の理論で書けるはずである．さらに，$g_s \ll 1$ でトポロジー展開の最低次，ツリー・ダイアグラムだけが支配的な場合は，場の古典論で十分なはずである．実際，このような理論は

*6)　球 $1/g_s^2$ に閉弦の外線を 3 つ加えると (g_s^3)，たしかに図 5.9 (b) の相互作用 g_s に比例する．

超重力理論 (supergravity) として知られている*7).

超重力理論の形は，ある程度一般的な考察から決めることができる*8)．たとえば，超弦理論のグラビトンも一般座標変換不変性をもつことを示すことができるので，重力部分は一般相対論と同様の

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} R \tag{5.4}$$

という形で与えられるはずである．ただし，超弦理論は 10 次元時空ではないと矛盾なく量子化できないので，10 次元の作用として書いた．G_{10} は 10 次元のニュートン定数である．同様に，ゲージ場に対してもゲージ不変性をもつことを示すことができるので，通常のゲージ場の作用で与えられるはずである．

超弦理論の基本的な結合定数は g_s である．一方，超重力理論の結合定数は G_{10} やゲージ場の結合定数 $g_{\rm YM}$ なので，g_s と超重力理論の結合定数に関係をつけることができる．$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とすると，グラビトンの作用は形式的に

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \left\{ \partial h \partial h + h \partial h \partial h + h^2 \partial h \partial h + \cdots \right\} \tag{5.5}$$

となる．これよりグラビトンの放出は $G_{10}^{1/2}$ に比例する．閉弦の放出は g_s に比例したので，$G_{10} \propto g_s^2$ となる．

またゲージ場の作用は，形式的に

$$\mathcal{S} = \frac{1}{g_{\rm YM}^2} \int d^{p+1}x \left\{ \partial A \partial A + A^2 \partial A + A^4 \right\} \tag{5.6}$$

となる*9)．これよりゲージ場の放出は $g_{\rm YM}$ に比例することがわかる．開弦の放出は $\tilde{g}_s \simeq g_s^{1/2}$ に比例したので，

$$g_{\rm YM}^2 \propto g_s \tag{5.7}$$

である．

結合定数の次元もあわせておこう．計量は通常無次元にとるので，式 (5.5) よりニュートン定数の次元は $[G_{10}] = (\text{長さ})^8$ である．一方，超弦理論の基礎的なスケールは，ストリングの典型的な長さをあらわす「ストリング長さ」l_s だけである（8.3 節）．したがって，次元もあわせると $G_{10} \simeq g_s^2 l_s^8$ となる．同様に，ゲージ場の次元は式 (5.6) より $[A] = (\text{長さ})^{-1}$ である．作用が無次元であるためには $[g_{\rm YM}^2] = (\text{長さ})^{p-3}$ である．したがって，次元もあわせると $g_{\rm YM}^2 \propto g_s l_s^{p-3}$ となる．まとめると，

---

*7) 局所的超対称性をもつ重力理論なのでこの名前がついているが，以下ではフェルミオンを含む項については議論しない．

*8) 正式には，5.2.3 節のようにストリングのファインマン・ダイアグラムを計算して，そのような散乱振幅を与える場の理論の作用を構成することで得られる．

*9) ここで時空次元を 10 次元ではなく，$(p+1)$ 次元にとったことをいぶかしく思うかもしれないが，あとでみるように超弦理論であっても $(p+1)$ 次元のゲージ理論を考えることができるからである．

$$G_{10} \propto g_s^2 l_s^8 \,, \quad g_{\rm YM}^2 \propto g_s l_s^{p-3} \tag{5.8}$$

式 (5.4) などはストリング長さ l_s が無視できるときの近似だが，ストリング長さが無視できなくなると

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g}\, e^{-2\phi}(R + l_s^2 R^2 + \cdots) \tag{5.9}$$

のように，曲率テンソルのベキが無限に続く．この種の補正は **α' 補正**と呼ばれる[*10]．場の理論の言葉では，これらは有効作用の高階微分に相当し，$O(1/l_s)$ という重い場を積分したことに由来する．大ざっぱに言って，$l_s^2 R \ll 1$ のとき，このような項は無視できることがわかる．

これらが超弦理論のトポロジー展開で，最低次「球」のダイアグラムに相当する．超弦理論の古典重力近似と言うときは，式 (5.4) ではなく式 (5.9) であることに注意．もっとも多くの場合，簡単のために時空の曲率が弱い場合を考えるので，式 (5.4) という作用や，式 (5.9) を使う場合でもせいぜい最低次の補正までしか考えない．

最後に細かい注意をしておくと，超重力理論は典型的には式 (5.4) という形ではなく，

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g}\, e^{-2\phi} \left\{ R + 4(\nabla\phi)^2 \right\} + \cdots \tag{5.10}$$

という形をしている．ここで ϕ は**ディラトン** (dilaton) と呼ばれるスカラー場である．式 (5.10) で特徴的な点の一つは，曲率の部分が単純に一般相対論の形ではなく，ディラトンの因子がかかっている点である．このため，ニュートン定数あるいはストリング結合定数は，実際にはディラトンの定数部分 $e^{2\phi_0}$ にあたる．もっとも，単純な AdS/CFT（5.4 節の D ブレーンの言葉では D3 ブレーンの場合）ではディラトンは定数なので，ここではあまり気にする必要はない．一般の AdS/CFT では，ディラトンは非自明な振るまいをすることもある．ディラトンが非自明ということは，実質的なニュートン定数が変化することを意味する．同様に，ゲージ場の作用にもディラトンの因子がかかりうるので，ゲージ場の結合定数も変化しうる．

5.3 強い相互作用としての超弦理論の再検討

5.3.1 分配関数の比較

4.2 節で，ラージ N_c ゲージ理論のダイアグラムが，2 次元面のトポロジーの足しあげとしてあらわされることをみた．5.2.3 節でみたように，これは閉弦のダイアグラムの構造と同じである．閉弦は重力をあらわすのだから，閉じた 2

*10) $\alpha' := l_s^2$ として α' というパラメータが定義されたことからこの名前がついている．

次元面の足しあげは重力の摂動展開に相当する．とくに，球は古典重力，トーラスは重力の 1 ループに相当する．

以上のことから示唆されるのは，「ラージ N_c ゲージ理論は弦理論であらわされ，とくにラージ N_c 極限では，(弦理論が記述する）古典重力であらわされる」という結論である．これは驚くべき結論である．もともとの理論はゲージ理論であり，重力を含まないのに，特別な場合には重力理論であらわされると主張しているからである．こうして，いったんはあきらめられたゲージ理論と超弦理論の関係（5.1 節）が再び浮上したのである．

具体的には，4.2 節でゲージ理論の分配関数，$Z_{ゲージ}$ が

$$\ln Z_{ゲージ} = \sum_{h=0}^{\infty} N_c^{\chi} f_h(\lambda) \tag{5.11}$$

で与えられることをみた．一方，本章の議論から超弦理論の分配関数，$Z_{ストリング}$ は

$$\ln Z_{ストリング} = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{g_s}\right)^{\chi} \tilde{f}_h(l_s) \tag{5.12}$$

の形にまとまる．ここで，超弦理論には α' 補正があるので，その依存性を $\tilde{f}_h(l_s)$ と書いた．式 (5.11), (5.12) は同じ構造をしているので，

$$Z_{ゲージ} = Z_{ストリング} \tag{5.13}$$

という関係式が成りたつと考えられる．そして，両者のパラメータに対し，

$$g_s^2 \propto G \propto \frac{1}{N_c^2}\ , \quad l_s \leftrightarrow \lambda\ , \tag{5.14}$$

という関係が得られる（ニュートン定数 $G \propto g_s^2$ の関係も使った）．

このように，ラージ N_c ゲージ理論の解析から，強い相互作用としての超弦理論の有効性がでてくることになった．ところが，すでにふれたように，弦理論を矛盾なく量子化するには，高次元時空が要求される．ポアンカレ対称性[*11] $ISO(1,d-1)$ を仮定すると，ボゾンだけを含んだ弦理論の場合は $d=26$, フェルミオンも含んだ弦理論の場合は $d=10$ が要求される．4 次元時空だけの弦理論は無矛盾ではない．つまり，

- ゲージ理論によると，ラージ N_c ゲージ理論は弦理論であらわされると主張するが，
- 一方，弦理論はそもそも 4 次元の理論として成立しない．

この 2 つのステートメントは相いれないように聞こえる．

この 2 つのステートメントが実際には矛盾していないことに気づくには，弦

*11） 非斉次 (inhomogeneous) ローレンツ対称性とも呼ばれる．$ISO(1,3) = \mathbb{R}^{1,3} \times SO(1,3)$.

理論は重力も含めた理論であることを認識する必要がある．すなわち，弦理論は平坦な時空だけではなく，曲がった時空を解としてもつはずである．そのような曲がった時空を考えることでゲージ理論をあらわすことができるかもしれない．そして，この曲がった時空自体は高次元時空でも構わない．この時空が $ISO(1,d-1)$ 対称性ではなく，$ISO(1,3)$ 対称性しかもたなければ，平坦な 4 次元の理論として解釈できるからである．この目的のためには，時空の次元として最低限 5 次元が必要であり，5 次元目の方向が曲がっていることになる．

したがって，ここまでにわかったことをまとめると，

> ラージ N_c ゲージ理論は，4 次元時空のポアンカレ対称性 $ISO(1,3)$ をもつ 5 次元の曲がった時空であらわされる．

このような時空の計量は，

$$ds_5^2 = \Omega(w)^2(-dt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2) + dw^2 \tag{5.15}$$

と書くことができる*12)．ここで，$x^\mu = (t, \boldsymbol{x}_3) = (t, x, y, z)$ である*13)．計量は $-dt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2$ の形を含むので，$(t, \boldsymbol{x}_3)$ 方向に $ISO(1,3)$ 対称性をもつ．したがって，$\boldsymbol{x}_3$ 方向がゲージ理論の空間方向に相当する．

5.3.2 スケール不変なゲージ理論と曲がった時空

ラージ N_c ゲージ理論と曲がった時空の関係については，このままではこれ以上の具体化は難しい．まず，弦理論があらわすゲージ理論が何なのかはっきりしない．つまり，それは QCD に近い理論なのか，それとももっと違う振るまいをする理論なのか，はっきりしない．また，ゲージ理論があらわす曲がった時空についてもはっきりしない．計量 (5.15) の $\Omega(w)$ の形が決まらないからである．ゲージ理論と曲がった時空を絞りこむために，もう一つ要請をおくことにしよう．要請としてはスケール対称性が適当である．

「純粋な」*14) ゲージ理論は，古典論的にスケール不変である．ただし，一般的なゲージ理論では，量子論的にはスケール不変ではない．このため，結合定数もエネルギースケールとともに変化し，QCD のように閉じこめなどが起こりうる．たとえば，純粋な $SU(N_c)$ ゲージ理論の 1 ループ β 関数は

$$\beta(g_{\rm YM}) = -\frac{11}{48\pi^2} g_{\rm YM}^3 N_c\ . \tag{5.17}$$

---

*12) $(t, \boldsymbol{x}_3)$ 方向の並進対称性より，Ω は $(t, \boldsymbol{x}_3)$ を含まない．なお，計量として

$$ds_5^2 = \Omega_1(w')^2(-dt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2) + \Omega_2(w')^2 dw'^2 \tag{5.16}$$

という形も可能だが，w' の再定義により式 (5.15) に帰着する．

*13) 以後，ギリシャ文字の添字 $\mu, \nu, \ldots$ は，ゲージ理論の住む 4 次元時空に対して使い，$0, \ldots, 3$ まで走るものとする．一方，大文字アルファベットの添字 $M, N, \ldots$ は，重力理論の住む「バルク時空」に対して使うものとする．

*14) 「純粋な」とは，物質場を含まないゲージ場だけの理論という意味である．

右辺が負であることは，理論が漸近的自由であることを示す．

しかし，ゲージ理論のなかには，量子論的にもスケール対称性を保つような特別なクラスの理論がある．たとえば，適当な物質場を加えれば，式 (5.17) の右辺をゼロにすることができるだろう．そこで，そのようなゲージ理論に焦点をあてよう．そのなかでも，もっとも対称性が高い理論として，**$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論**という理論が知られている．ここで，$\mathcal{N}=4$ は理論が 4 つの supercharge をもつことを示し，4 次元のゲージ理論がもちえる最大の超対称性である．

$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論に含まれる場は，

- ゲージ場 A_μ,
- スカラー場（6 つ）ϕ_i,
- ワイル・フェルミオン（4 つ）λ_I

である（簡単化のため，$SU(N_c)$ およびスピノルの添字は省く）．超対称性から，これらの場はすべてゲージ群の随伴表現として変換する．

$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の作用は

$$\mathcal{L}=\frac{1}{g_{\rm YM}^2}\mathrm{tr}\left[-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2-(D_\mu\phi_i)^2-i\bar{\lambda}_I\gamma^\mu D_\mu\lambda^I+O(\phi^4)+O(\lambda\lambda\phi)\right]$$

で与えられる*15)．最初の 3 項は，ゲージ場，スカラー場，フェルミオンに対する通常の運動項である．くわえて，作用には ϕ^4 および湯川相互作用もあるが，ここでは形式的にのみ書いた．ゲージ場とスカラー場は質量次元 1，フェルミオンは質量次元 3/2 なので，作用のすべての項が質量次元 4 をもっている．つまり，理論には次元をもったパラメータは出現せず，スケール不変になっている．

このように，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論は古典論的にスケール不変だが，量子論的にもスケール不変である．ここではそれを示さないが，1 ループの β 関数だけみておこう．随伴表現のフェルミオン，スカラーを含む $SU(N_c)$ ゲージ理論の 1 ループ β 関数は，

$$\beta(g_{\rm YM})=-\frac{g_{\rm YM}^3}{48\pi^2}N_c\left(11-2n_f-\frac{1}{2}n_s\right) \tag{5.18}$$

で与えられる．ここで，n_f, n_s はそれぞれワイル・フェルミオン，実スカラーの数である．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論では，$n_f=4, n_s=6$ なので，$\beta=0$ になる．

一方，曲がった時空には，スケール対称性からどのような制限がつくのだろう．式 (5.15) の計量を引き続き考えることにする．

$$x^\mu \to ax^\mu \tag{5.19}$$

というスケール変換の下で，

*15) ここで $F_{\mu\nu}:=F_{\mu\nu}^a t^a$．ゲージ群の生成子 t^a に対して，本書では $\mathrm{tr}(t^a t^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}$ の規約を使う．

$$\Omega(w)^2 \to a^{-2}\Omega(w)^2 \tag{5.20}$$

と変換すれば，計量 (5.15) はスケール不変である．このためには w を変換する必要があるが，5 次元目の線素が dw^2 なので，w に対しては並進変換しか許されない．w は長さの次元をもつので，長さの次元をもつパラメータ L を導入して，この並進変換を

$$w \to w + L\ln a \tag{5.21}$$

と書くことにする*16)．スケール変換 (5.19), (5.21) の下で，$\Omega(w) \to a^{-1}\Omega(w)$ と振るまうことから，$\Omega(w)$ の形がユニークに決まる*17)：

$$ds_5^2 = e^{-2w/L}(-dt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2) + dw^2 \ . \tag{5.22}$$

これは，5 次元**反ド・ジッター時空** (AdS_5) と呼ばれる時空である（6 章）．L のことを **AdS 半径**と呼ぶ．したがって，この AdS_5 時空こそ，スケール不変なラージ N_c ゲージ理論に対応する曲がった時空だと考えられる．

ここまでポアンカレ対称性とスケール対称性に着目したが，実は $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論も AdS_5 時空もより大きな対称性をもつ．相対論的な場の理論では，ポアンカレ対称性 $ISO(1,3)$ とスケール対称性があわさって，しばしば**コンフォーマル対称性** $SO(2,4)$ へと拡張される [14]．また，6 章でみるように，AdS_5 時空も $SO(2,4)$ 対称性をもつ．

まとめると，スケール対称性という要請をさらに課すことで，

- $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のようなスケール不変なゲージ理論
- AdS_5 時空

という 2 つが候補にのぼってきた．

5.3.3 AdS/CFT へ

さらに言えることを考えてみよう．ラージ N_c 極限では，ゲージ理論は古典重力理論であらわされる，というのが我々の結論だったが，AdS_5 時空は負の宇宙定数をもつ重力理論の解である．したがって，この重力理論とは

$$\mathcal{S}_5 = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\,\sqrt{-g_5}(R_5 - 2\Lambda) \tag{5.23}$$

という形であるはずである．

ところで，式 (5.23) の解は AdS 時空に限られない．たとえば，AdS 時空にもブラックホールが存在しうる（7 章）．3 章でみたように，ブラックホールは熱力学系とみなすことができるので，

---

*16） このようにおいても一般性を失わない．パラメータ L の再定義により，常にこの形にできる．

*17） あとの式 (5.34) の形にするには $r = Le^{-w/L}$ と座標変換すればよい．

- ゼロ温度のゲージ理論 $\leftrightarrow$ AdS 時空
- 有限温度のゲージ理論 $\leftrightarrow$ AdS ブラックホール

という対応関係が自然であろう．

ここまで来ると，式 (5.13) を実際に計算可能なまでに具体化できたことになる．まず，

$$\boxed{Z_{\text{CFT}} = Z_{\text{AdS}_5}} \tag{5.24}$$

左辺はスケール対称性（コンフォーマル対称性）をもったゲージ理論の分配関数，右辺は AdS_5 時空での超弦理論の分配関数である．このような関係式を **GKP–ウィッテン関係式**と言う[*18)]．

もっとも，ラージ N_c 極限では，右辺は古典重力理論で十分である．この場合，ブラックホール熱力学量を議論したときのように（3.2.2 節），右辺は鞍点近似で置きかえられる：

$$Z_{\text{CFT }(N_c \gg 1)} = e^{-\underline{\mathcal{S}_{\text{E}}}+O\left(l_s^2\right)} . \tag{5.25}$$

$\mathcal{S}_{\text{E}}$ は作用 (5.23) をユークリッド化したものであり，$\underline{\mathcal{S}_{\text{E}}}$ は計量の古典解を代入した on-shell 作用である．

右辺は超弦理論の古典重力近似なので，一般に α' 補正がつく．それを $O\left(l_s^2\right)$ と書いた．しかし，時空の曲率が小さい場合は，この補正は無視できる．式 (5.14) でみたように，α' 補正はトホーフト結合定数 λ と関係する．より正確には $\lambda^{-1} \propto l_s^4$ なので（5.4.4 節），ゲージ理論の立場では $\lambda \gg 1$ ととることに対応する．したがって，最終的に

$$\boxed{Z_{\text{CFT }(N_c \gg \lambda \gg 1)} = e^{-\underline{\mathcal{S}_{\text{E}}}}} \tag{5.26}$$

この極限は，たとえラージ N_c 展開といえども場の理論的には評価が難しい．しかし，右辺は，この極限が一般相対論の計算で十分評価できることを意味している．今後さまざまな例を通して，この式を評価する．

この節で展開した議論は，発見法的なものである．しかし，超弦理論に含まれる「D ブレーン」を使うと，よりシステマティックな議論をおこなうことができる．D ブレーンによって，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論と AdS_5 時空を「つなげる」ことができるからである．また，両方の理論のパラメータ間の関係 (5.14) も正確に導くことができる．

---

*18） GKP はウィッテンと独立にこの関係式を提案した 3 人の頭文字 (Gubser–Klebanov–Polyakov) である[15],[16]．

5.4 D ブレーンと AdS/CFT

5.4.1 D ブレーンとゲージ理論

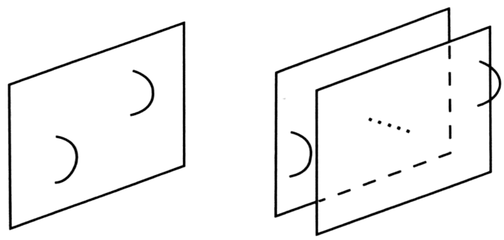
この節は読者にとって，とくにハードルが高いと思われる．しかし，この節の内容を初学者が完全に消化する必要はない．ある程度 AdS/CFT の計算に慣れたあとで，あらためてこの節に戻ってくれれば十分である．この段階でこの節を含むのは「AdS/CFT 辞書」など以下の章で必須となる知識を含むからである．

超弦理論には **D ブレーン**と呼ばれる物体も存在する（図 5.14 (a)）．開弦はこの D ブレーン上に端点をもつこともできる．以下で考える開弦はいつもこのタイプである．端点が固定されていてもこれは開弦なので，やはりゲージ理論をあらわす．ただ，開弦は D ブレーン上に端点をもっているので，このゲージ理論は D ブレーン上に局在している．

D ブレーンは，何枚か重なりあうこともできる．すると，開弦は D ブレーン上に端点をもつが，端点を別々の D ブレーン上に置くことができる（図 5.14 (b) で，実線のもの 2 種類と点線のもの）．このあらたな自由度は，この場合のゲージ理論が $U(1)$ ゲージ理論ではなく，$SU(N_c)$ ゲージ理論をあらわすことを意味する（N_c はブレーンの枚数）[*19]．

さまざまな次元の D ブレーンが存在する．p 次元の空間的広がりをもった D ブレーンのことを Dp ブレーンと呼ぶ．つまり，

$p=0$	点粒子的な物体
$p=1$	ストリング的な物体
$p=2$	メンブレーン的な物体
$\vdots$	$\vdots$



(a)　　　(b)

図 5.14　(a) 開弦は，D ブレーンと呼ばれる物体上に端点をもつこともできる．(b) D ブレーンが N_c 枚あると，$SU(N_c)$ ゲージ理論になる．図示する都合上，ブレーンを離して描いているが，実際には重なったものを考える．

*19)　正確には $U(N_c)$ ゲージ理論をあらわすが，$U(1)$ 部分はブレーンの重心運動に相当し，$SU(N_c)$ 部分と decouple する．

したがって，Dp ブレーンは $(p+1)$ 次元のゲージ理論をあらわす．我々は 4 次元時空でのゲージ理論に興味があるので，QCD に似た理論を考えるには D3 ブレーンを考えればよいことになる*20)．

これまでの議論で一つ注意すべき点がある．超弦理論は実際には無矛盾性のためには 10 次元時空を要求する．開弦は D ブレーン上に拘束されており，したがって D3 ブレーンは 4 次元ゲージ理論をあらわすが，これらの開弦は依然として 10 次元時空中で振動するはずである．すなわち，一番単純な開弦の振動は上で議論した自由度 2 ではなく，自由度 8 をもつ．これらの自由度は何だろう？　別の言葉で言えば，D3 ブレーンがあらわすゲージ理論はどのようなゲージ理論なのだろう？

この点を理解するために，ストリングの振動には 2 種類あることに注意しよう．一つはブレーン内での振動で，もう一つはブレーンに垂直方向の振動である．4 次元の立場では（すなわち $SO(1,3)$ の表現では），前者はゲージ場をあらわし，後者はスカラー場をあらわす．ブレーンに垂直な空間次元は 6 次元なので，6 個のスカラー場があることになる．つまり，D3 ブレーンによってあらわされるゲージ理論は，必然的にスカラー場を伴うことがわかる．

また，詳細は省くが超弦理論がもつ超対称性に由来するフェルミオンもある．ローレンツ変換の下での変換性は違うが，これらの場は同じようなストリングの振動から来ている．その結果，これらの場はすべてゲージ群の随伴表現として変換する．つまり，この理論にはクォークのような基本表現は含まれない*21)．これらの性質は，ちょうど $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の性質と一致する．

なお，いま考えているように D3 ブレーンしかない場合は，ブレーンに垂直な方向は等方的である．これらの方向はスカラー場 ϕ_i に対応するので，等方性は ϕ_i が $SO(6)$ 大域的対称性をもつことを意味する．この大域的対称性は **R 対称性**と呼ばれる．したがって，コンフォーマル対称性 $SO(2,4)$ とあわせて，

> $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論は $SO(2,4)\times SO(6)_R$ 大域的対称性をもつ

このようにして D ブレーンからゲージ理論が出ることをみたが，D ブレーンが単にゲージ理論であらわされるか，この段階ではまだ明らかではない．というのも，超弦理論は単なるゲージ理論ではないからである．

- 超弦理論は統一理論なので，とくに重力を含むはずである．
- また，ゲージ理論に対応するのは，図 5.6 でみたように開弦のもっとも低い振動だが，より高い励起状態もあるはずである．これらは重い粒子に相

*20)　ブレーンの一部の方向を「丸める」のであれば，必ずしも D3 ブレーンに限られるわけではない（たとえば酒井–杉本模型 [17]）．なお，D1 ブレーンはストリング的な物体だが，これまで議論してきたストリング（基本弦）とは違う物体である．

*21)　基本表現を入れる一つの簡単な方法については，8.2 節で議論する．

当する．

これまでの議論では，これらの効果が無視できるかどうかはっきりしない．

まず重力を考えよう．ニュートン・ポテンシャルは

$$\phi_{\text{Newton}} \simeq \frac{GM}{r} \tag{5.27}$$

であらわされるので，重力の強さを GM で測ることができる．もっとも，これは空間 3 次元の粒子の場合である．実際にはニュートン定数は 4 次元の G_4 ではなく，10 次元の G_{10} を使う必要がある．また，ブレーンは広がっているので，M のかわりにブレーンの質量密度 T_3 を使い，ブレーンに垂直な空間次元は 6 次元だということを考慮に入れる必要がある．したがって，

$$\phi_{\text{Newton}} \simeq \frac{G_{10}T_3}{r^4} \tag{5.28}$$

となる．

$$T_3 \simeq \frac{N_c}{g_s}\frac{1}{l_s^4} \tag{5.29}$$

になることが知られている．式 (5.8) を使って，$G_{10}T_3 \simeq g_s N_c l_s^4$ となる．一方，ゲージ理論の有効結合定数はトホーフト結合定数 $\lambda := g_{\text{YM}}^2 N_c \simeq g_s N_c$ である．いま，超弦理論の摂動論が使えるために $g_s \ll 1$ を仮定しているが，さらにゲージ理論の摂動論が使えるように，$g_s N_c \ll 1$ ととることにしよう．まとめると，

$$\text{ブレーンが作る重力の強さ：}\quad G_{10}T_3 \simeq g_s N_c l_s^4\ , \tag{5.30}$$

$$\text{ゲージ理論としての有効結合定数：}\quad \lambda \simeq g_s N_c\ . \tag{5.31}$$

ゲージ理論として非自明なダイナミクスを残しつつ，重力の効果が無視できるためには $l_s \to 0$ という極限をとればよいことがわかる（decoupling 極限）．

一方，重い粒子は $M \simeq 1/l_s$ 程度の質量をもつ．したがって，やはり $l_s \to 0$ という極限で理論から decouple することがわかる．

以上より，D3 ブレーンから得られたのは，

（弱結合の $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論）
+（平坦な 10 次元時空上の超重力理論）

5.4.2 D ブレーンと曲がった時空

ところが $g_s N_c \gg 1$ のときは，上の結果は成立しない．D ブレーンは時空を大きく曲げてしまうからである．ニュートン・ポテンシャルに戻ればわかるように，$GM \to 0$ 極限をとることにより，重力の効果が消えるようにしたが，これは原点 $r \to 0$ 近傍では成立しない．その結果，原点近傍 ($r^4 \ll g_s N_c l_s^4$) で

は曲がった時空があらわれる．もっとも，$g_s N_c \ll 1$ 極限では，その領域は無視できる程度の大きさで，単に平坦な時空に D ブレーンをあらわすソースがあると考えて構わない．これが上で考えた場合である．しかし，$g_s N_c \gg 1$ 極限ではマクロな大きさの曲がった時空があらわれてしまう．

このような曲がった時空を考えるには，むしろ超重力理論を使った方がいい．超重力理論を使うと，D3 ブレーンによって作られる曲がった時空の様子は，

$$ds_{10}^2 = Z^{-1/2}(-dt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2) + Z^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \ , \tag{5.32}$$

$$Z = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4 \ , \quad L^4 \simeq g_s N_c l_s^4 \ . \tag{5.33}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_3 = (x, y, z)$ はブレーンが伸びている方向をあらわす．いま，D ブレーンが原点近くでどう時空を曲げるのかに興味があるので，$r \ll L$ 極限をとると（**near-horizon 極限**），

$$ds_{10}^2 \to \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2} + L^2 d\Omega_5^2 \ . \tag{5.34}$$

最後の $L^2 d\Omega_5^2$ の部分は，半径 L の S^5 をあらわす．残りの 5 次元部分が，AdS_5 時空である．この near-horizon 極限は，ゲージ理論の立場では decoupling 極限に相当する*22)．

以上より，D3 ブレーンが作る時空を大ざっぱに原点近くの $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ とその周りの平坦な時空に分けることにしよう：

（$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の超重力理論）
＋（平坦な 10 次元時空上の超重力理論）

5.3.2 節でふれたように，AdS_5 時空は $SO(2,4)$ 対称性をもつ．くわえて，計量 (5.34) は S^5 を含むので，$\mathcal{N}=4$ R 対称性と同じ $SO(6)$ 対称性をもつ．したがって，

---

*22) ♦ ゲージ理論の典型的なスケールを l_{obs} とすると，超弦理論のスケール l_s が無視できるのは，

$$l_s \ll l_{\mathrm{obs}} \tag{5.35}$$

の場合である．l_{obs} として「W ボゾンの質量スケール」を選ぶことにしよう．ここで言う「W ボゾン」とは，ゲージ群を $SU(N_c) \to SU(N_c - 1) \times U(1)$ と破ったときのゲージボゾンの質量である．D ブレーンでは，N_c 枚重なった D ブレーンから 1 枚だけ（距離 r）離すことに相当する．ゲージボゾンは開弦に相当したが，このように分けると開弦は張力をもっているので，ゲージボゾンは massive になる．この質量は

$$\frac{1}{l_{\mathrm{obs}}} \simeq \frac{r}{l_s^2} \tag{5.36}$$

程度になる（開弦の張力は $\simeq 1/l_s^2$）．式 (5.35) と式 (5.36) から

$$r \ll l_s \tag{5.37}$$

という関係が得られる．これが decoupling 極限である．

$g_s N_c \gg 1$ の場合，$r \ll l_s$ 極限は $r \ll L$ の near-horizon 極限を意味する．

重力側も $SO(2,4) \times SO(6)$ 大域的対称性をもつ

5.4.3 ゲージ理論と曲がった時空

これまでの議論をまとめると，D3 ブレーンから $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の超重力理論の 2 つの系が得られた．また，平坦な 10 次元時空上の超重力理論部分が共通してあらわれた．この部分は共通しているので，残りの部分，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の超重力理論がある意味対応していることになる．

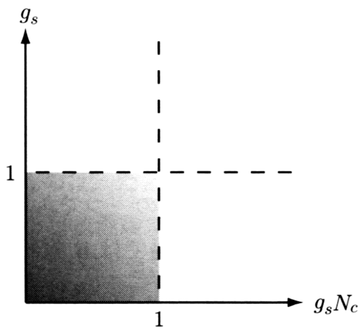
もっとも，ゲージ理論によるブレーン描像と，超重力理論によるブレーン描像とは，相補的な関係にある（図 5.15）．さきにみたように平坦な時空での描像は，$g_s \ll 1$, $g_s N_c \ll 1$ のときに成立するが，超重力理論による描像は $g_s \ll 1$, $g_s N_c \gg 1$ のときに成立する．計量 (5.34) に対して，曲率は

$$R^{MNPQ} R_{MNPQ} \propto \frac{1}{g_s N_c l_s^4} \tag{5.38}$$

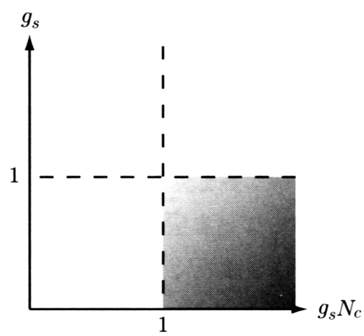
と振るまうからである．$g_s N_c \ll 1$ のときは時空の曲率が大きくなる．このときは α' 補正が強く効き，一般に計量 (5.34) の様子は大きく変わりうる．つまり，(5.34) のような計量が一般に信頼できるのは，$g_s N_c \gg 1$ のときである．

しかし，原理的にはどちらの理論も g_s, $g_s N_c$ の全領域で存在する．5.3 節の議論を踏まえると，両者の理論が g_s, $g_s N_c$ の全領域で同等であると考えるのが自然である．だとすると，一方の理論で解析が難しい領域でも，もう一方の理論を使って計算できることになる．

これは論理的な帰結というわけではない．2 つの理論は D3 ブレーンから得られた．しかし，D3 ブレーンの違う極限が 2 つの理論に対応するにすぎない



(a) $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論



(b) $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の超重力理論

図 5.15 D3 ブレーンから $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の超重力理論が得られたが，2 つの理論は相補的な関係にある．すなわち，それぞれの理論で解析が容易な領域（アミをかけた部分）は重ならない．AdS/CFT はこの両者が同等だと主張する．

からである．したがって，この主張を確かめるには，同じ g_s, g_sN_c で両方の結果を比べることが必要である．超対称性が存在する状況下では，多くの状況証拠が得られている．しかし，本書ではそのような証拠は議論しない．むしろ，実際の応用に関係した計算を通して，重力理論からゲージ理論として自然に解釈できる物理量が出てくることや，実験結果やほかの理論的手法で得られた結果（格子ゲージ理論など）と比べることで，AdS/CFT が確からしいことをみる方針をとる．

5.4.4 D ブレーンを通してわかったこと

D ブレーンを通してわかったこととして，第一に GKP–ウィッテン関係式 (5.24) の両辺がより正確にわかったことが挙げられる：

$$Z_{\mathcal{N}=4} = Z_{\mathrm{AdS}_5 \times S^5} \ . \tag{5.39}$$

左辺は $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の分配関数，右辺は $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 時空での超弦理論の分配関数である．

これまでコンフォーマル対称性だけに着目したが，理論を特定できたのは，結局のところ $\mathcal{N}=4$ R 対称性も考慮したためである．この対称性を反映させるため，重力側にも S^5 をつけ加えたとも言える．したがって，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論以外の場合で，対応する重力理論をみつける際にも，双方の理論がもつ対称性を生かすことが重要である．

第二にわかることとしては，両理論のパラメータの関係 (5.14) である．これは，これまでに登場した式 (5.8), (5.33) をまとめることで得られる：

$$L^4 \simeq g_s N_c l_s^4 \ , \tag{5.40a}$$

$$G_{10} \simeq g_s^2 l_s^8 \ , \tag{5.40b}$$

$$g_s \simeq g_{\mathrm{YM}}^2 \ . \tag{5.40c}$$

これらの式から g_s を消去すると，

$$N_c^2 \simeq \frac{L^8}{G_{10}} \ , \quad \lambda \simeq \left(\frac{L}{l_s}\right)^4 \ . \tag{5.41}$$

これらは **AdS/CFT 辞書**と呼ばれる式の一つである．

さて，S^5 は $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の立場では R 対称性に相当し理論の重要な一部だが，しばしば S^5 をコンパクト化して，実質 5 次元の重力理論を考える．こうして得られた理論は**ゲージ化された超重力理論** (gauged supergravity) と呼ばれる．

このコンパクト化の手続きは実際には複雑で，得られる作用も複雑だが，いまの場合は実際におこなう必要はなく，ある程度見当がつく．と言うのも，5 次元部分は AdS_5 時空なので，5 次元作用は式 (5.23) で与えられるはずである．

S^5 の半径は L なので，コンパクト化によって

$$\frac{1}{16\pi G_{10}}\int d^{10}x\sqrt{-g_{10}}R_{10} \simeq \frac{L^5}{16\pi G_{10}}\int d^5x\sqrt{-g_5}\,(R_5+\cdots)\ .$$

したがって，5 次元のニュートン定数は $G_5 \simeq G_{10}/L^5$ である．これを使うと，AdS 辞書 (5.41) を G_5 で書き直すことができる．係数まで注意してまとめると，

$$\boxed{N_c^2 = \frac{\pi}{2}\frac{L^3}{G_5}\ ,\quad \lambda = \left(\frac{L}{l_s}\right)^4} \tag{5.42}$$

有限温度の場合

式 (5.32) は D3 ブレーンのゼロ温度の解（極限ブラックホール）であり，ゼロ温度の $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論に相当する．有限温度を考えるには，D3 ブレーンの有限温度解を使う：

$$ds_{10}^2 = Z^{-1/2}(-hdt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2) + Z^{1/2}(h^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)\ , \tag{5.43}$$

$$Z = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4\ , \tag{5.44}$$

$$h = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\ . \tag{5.45}$$

$r = r_0$ がホライズンである．near-horizon 極限 $r \ll L$ をとっても，ホライズンの外であるために $r_0 \ll L$ とする．すると，near-horizon 極限で，

$$ds_{10}^2 \to \left(\frac{r}{L}\right)^2(-hdt^2 + d\boldsymbol{x}_3^2) + L^2\frac{dr^2}{hr^2} + L^2 d\Omega_5^2\ . \tag{5.46}$$

これは，シュワルツシルド AdS_5 ブラックホールと呼ばれる解である（7 章）．$h = 1$ の場合は AdS_5 計量であり，h という因子は高次元シュワルツシルド・ブラックホールと似ている．

コメント

念のために注意しておくと，超弦理論は統一理論の最有力候補だが，AdS/CFT で考えるのは統一理論としての超弦理論ではなく,「仮想的な」超弦理論である．と言うのは，たとえば現実世界ではニュートン定数 G は決まっているので，現実的な超弦理論では $N_c \to \infty$ 極限はとれず，ある値に定まっているはずだからである*23)．AdS/CFT で考えるのは，ラージ N_c ゲージ理論をあらわすための仮想的な超弦理論である．

本章では AdS 時空や AdS ブラックホールが登場してきたが，以下の章でこれらの時空についてあらためて詳しくみていこう．

---

*23)　このメカニズムについては，まだ詳しいことはわかっていない．

第 6 章

AdS時空

AdS 時空は定曲率時空と呼ばれる時空の一種である．なじみをもつために，まず球のような定曲率空間を議論し，それを踏まえて定曲率時空を議論する．

6.1　定曲率時空

6.1.1　定曲率空間

AdS 時空のような定曲率時空を議論する前に，まずは簡単な例，2 次元球 S^2 から考えよう．球は 3 次元ユークリッド空間

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \tag{6.1}$$

のなかで，

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2 \tag{6.2}$$

という条件を満たす面として定義される．この拘束条件は標準的な極座標を使うことで解くことができる：

$$X = L\sin\theta\cos\varphi\ , \quad Y = L\sin\theta\sin\varphi\ , \quad Z = L\cos\theta\ . \tag{6.3}$$

この座標で計量は

$$ds^2 = L^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\ . \tag{6.4}$$

S^2 は一様な空間である．これは，面 (6.2) が 3 次元ユークリッド空間 (6.1) の対称性 $SO(3)$ を保つことからわかる．つまり，S^2 のどの点も $SO(3)$ 変換によって，ほかの点に移ることができる．球の曲率は正の定数をもち，リッチ・スカラーは

$$R = \frac{2}{L^2}\ . \tag{6.5}$$

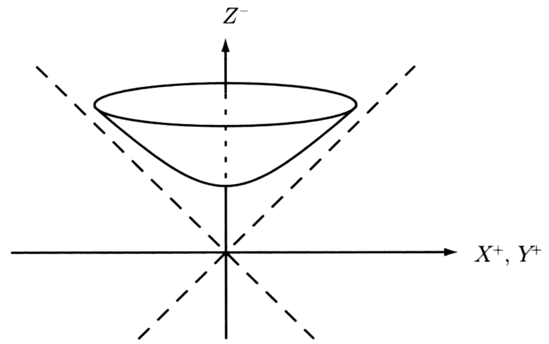


図 6.1 双曲空間 H^2 の $\mathbb{R}^{1,2}$ への埋め込み．座標の肩の符号は，各座標が時間的 $(-)$ か空間的 $(+)$ かをあらわす．

一方，負の定曲率をもった空間は，**双曲空間** (H^2) として知られている．負の定曲率をもった空間は，ずっとイメージが困難である．一つの理由は，双曲空間は球と違い，3 次元のユークリッド空間には埋め込むことができないからである．しかし，3 次元のミンコフスキー空間には埋め込むことができる．双曲空間は（図 6.1），

$$ds^2 = -dZ^2 + dX^2 + dY^2 \ , \tag{6.6}$$

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2 \ , \tag{6.7}$$

として定義される．双曲空間は計量の対称性 $SO(1,2)$ を保つ一様な空間である．つまり，面上のどの点も $SO(1,2)$「ローレンツ変換」によって，ほかの点に移ることができる．また，双曲空間は双曲面 (hyperboloid) ではないことに注意：

$$ds^2 = dZ^2 + dX^2 + dY^2 \ , \tag{6.8}$$

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2 \ . \tag{6.9}$$

双曲面はユークリッド空間に埋め込まれており，計量の対称性 $SO(3)$ を保たない．すなわち，双曲面は一様な空間ではない．

拘束条件 (6.7) を解くために，球の場合と少し違う座標系をとる：

$$X = L \sinh\rho \cos\varphi \ , \quad Y = L \sinh\rho \sin\varphi \ , \quad Z = L \cosh\rho \ . \tag{6.10}$$

すると，双曲空間の計量は，

$$ds^2 = L^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\varphi^2) \ . \tag{6.11}$$

計量をみればわかるように，3 次元のミンコフスキー空間に埋め込んでいるものの，双曲空間自体は時間方向をもたないことに注意．すなわち，双曲空間は空間であり時空ではない．曲率は負の定数をもつ：

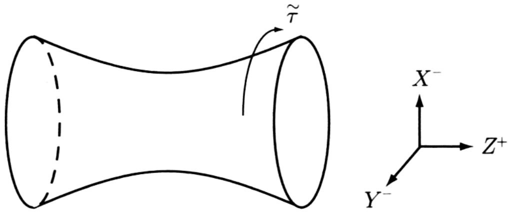


図 6.2 AdS_2 時空の $\mathbb{R}^{2,1}$ への埋め込み．時間方向が周期的になっているため，被覆空間を考える．

$$R = -\frac{2}{L^2} . \tag{6.12}$$

双曲空間をイメージするのは容易ではないが，特殊相対論における質量殻条件 (2.12) が双曲空間にほかならない．共変運動量 $p^\mu = (p_0, p_1, p_2)$ をもつ質量 m の粒子に対して，

$$p^2 = -(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 = -m^2 \tag{6.13}$$

が成りたつが，これは双曲空間の埋め込み条件 (6.7) と同じ形をしている．

6.1.2 定曲率時空：宇宙項をもった時空

これまでの議論は定曲率をもった「空間」だったが，いよいよ定曲率をもった「時空」を考えよう．時間方向が 2 つある時空に埋め込むと，AdS_2 時空は（図 6.2）

$$ds^2 = -dX^2 - dY^2 + dZ^2 , \tag{6.14}$$

$$-X^2 - Y^2 + Z^2 = -L^2 . \tag{6.15}$$

この場合の L を **AdS 半径**と呼ぶ．AdS_2 時空は $SO(2,1)$ 対称性をもつ．S^2, H^2 の場合と同様に，

$$X = L\cosh\rho\cos\tilde{\tau} , \quad Y = L\cosh\rho\sin\tilde{\tau} , \quad Z = L\sinh\rho , \tag{6.16}$$

という座標系をとると，

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2\rho\, d\tilde{\tau}^2 + d\rho^2) . \tag{6.17}$$

この座標系 $(\tilde{\tau}, r)$ を**グローバル座標**と呼ぶ．このように，時間方向が 2 つある時空に埋め込んでいるものの (X, Y)，AdS 時空自体は時間方向を 1 つだけもつ．

式 (6.16) より，時間方向 $\tilde{\tau}$ の値域は $\tilde{\tau} : 0 \to 2\pi$ なので，時間方向は周期的である．これは因果律的に問題をはらんでいるため[*1]，通常 $\tilde{\tau} : -\infty \to \infty$ とした AdS_2 時空の被覆空間 (covering space) を考える．AdS/CFT における AdS 時空は被覆空間を考える．

*1) 因果的曲線が閉じている「閉じた因果的曲線」(closed timelike curve) が可能になってしまうため．

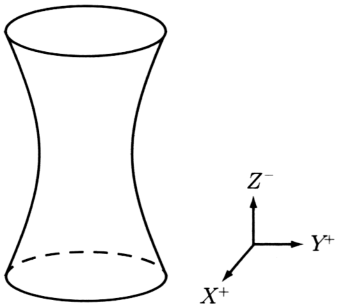


図 6.3 dS_2 時空の $\mathbb{R}^{1,2}$ への埋め込み．図 6.2 とほぼ同じであるが，各埋め込み座標の符号が違うことに注意．

ついでに，もう一つの定曲率時空として**ド・ジッター時空**がある．ド・ジッター時空は正の定曲率をもった時空で，AdS/CFT で登場するわけではないが，近年ダーク・エネルギーとの関連で宇宙論的な興味で盛んに議論されている．2 次元ド・ジッター時空 (dS_2) は，以下のように定義される（図 6.3）：

$$ds^2 = -dZ^2 + dX^2 + dY^2 \ , \tag{6.18}$$

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = +L^2 \ . \tag{6.19}$$

dS_2 時空は $SO(1,2)$ 対称性をもつ．

$$X = L\cosh\tilde{\tau}\cos\theta \ , \quad Y = L\cosh\tilde{\tau}\sin\theta \ , \quad Z = L\sinh\tilde{\tau} \ , \tag{6.20}$$

という座標系をとると，

$$ds^2 = L^2(-d\tilde{\tau}^2 + \cosh^2\tilde{\tau}\, d\theta^2) \ . \tag{6.21}$$

AdS 時空の場合，AdS_5 時空を考えることが多いが，dS 時空の場合は宇宙論的な興味から dS_4 時空を考えることが多い．

6.1.3 定曲率空間との関係

さまざまな空間・時空が登場したが，定曲率時空は定曲率空間と関係がある．定曲率時空をユークリッド化したものが，定曲率空間である：

$$\boxed{\begin{array}{r} \mathrm{AdS}_2 \xrightarrow{\text{ユークリッド化}} \mathrm{H}^2 \\ \mathrm{dS}_2 \xrightarrow{\text{ユークリッド化}} S^2 \end{array}} \tag{6.22}$$

dS_2 時空と S^2 は，

$$\mathrm{dS}_2: \quad ds^2 = -dZ^2 + dX^2 + dY^2 \ , \quad -Z^2 + X^2 + Y^2 = L^2 \ . \tag{6.23}$$

$$S^2: \quad ds^2 = dZ^2 + dX^2 + dY^2 \ , \quad Z^2 + X^2 + Y^2 = L^2 \ . \tag{6.24}$$

で与えられるので，dS_2 時空で $Z_E = iZ$ とすると，S^2 にユークリッド化される．AdS_2 時空と H^2 は，

$$\mathrm{AdS}_2: \quad ds^2 = -dZ^2 - dX^2 + dY^2 \ , \quad -Z^2 - X^2 + Y^2 = -L^2 \ . \tag{6.25}$$

$$\mathrm{H}^2: \quad ds^2 = -dZ^2 + dX^2 + dY^2 \ , \quad -Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2 \ . \tag{6.26}$$

で与えられるので（見易くするために AdS_2 時空の書き方をかえた），AdS_2 時空で $X_E = iX$ とすると，H^2 にユークリッド化される．AdS/CFT ではユークリッド化した時空も，しばしば用いられる．

6.1.4 AdS 時空のさまざまな座標系

これまで AdS 時空を

$$\frac{ds^2}{L^2} = -\cosh^2 \rho \, d\tilde{\tau}^2 + d\rho^2 \tag{6.27}$$

というグローバル座標 $(\tilde{\tau}, \rho)$ を使って議論してきたが，ほかにもいくつかの座標系がしばしば登場する．

静的座標 $(\tilde{\tau}, r)$

$r := \sinh \rho$ と定義され，

$$\frac{ds^2}{L^2} = -(r^2 + 1) \, d\tilde{\tau}^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} \ . \tag{6.28}$$

この座標系は，ブラックホールがある場合との関係が見やすい（7.3 節）．

コンフォーマル座標 $(\tilde{\tau}, \theta)$

$\tan \theta := \sinh \rho$ と定義され[*2] $(\theta : -\pi/2 \to \pi/2)$，

$$\frac{ds^2}{L^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta}(-d\tilde{\tau}^2 + d\theta^2) \ . \tag{6.29}$$

したがって，この座標系では AdS 時空は図 6.4 のようになる．ここで，$\theta = \pm\pi/2$ に時間的に伸びる「境界」がある点が重要である．この境界を **AdS 境界**と呼ぶ．静的座標では $r \to \infty$，以下のポアンカレ座標では $\tilde{u} \to \infty$ が AdS 境界である．このことは，初期値問題を解くには，AdS 境界での境界条件も指定する必要があることを意味する．AdS/CFT の立場では，この境界条件はゲージ理論に加える外場を指定することに相当する（10 章）．

ポアンカレ座標 $(t, \tilde{u})$

この座標系は $(\tilde{u} > 0, \, t : -\infty \to \infty)$，

*2) 「コンフォーマル座標」という呼び方は標準的というわけではない．

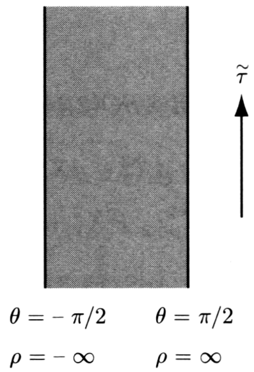


図 6.4　コンフォーマル座標での AdS_2 時空.

$$X = L\,\tilde{u}\,t\ , \tag{6.30}$$

$$Y = \frac{1}{2\tilde{u}}\left\{1 + \tilde{u}^2(L^2 - t^2)\right\}\ , \tag{6.31}$$

$$Z = \frac{1}{2\tilde{u}}\left\{1 - \tilde{u}^2(L^2 + t^2)\right\}\ , \tag{6.32}$$

で定義され，計量は

$$\boxed{\frac{ds^2}{L^2} = -\tilde{u}^2 dt^2 + \frac{d\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2}} \tag{6.33}$$

この座標系も，ブラックホールがある場合との関係が見やすい（7.1 節）.

6.1.5　一般の次元の場合

これまで議論した定曲率空間／時空は，空間方向を p 個新たにつけ加えることで，一般の $(p+2)$ 次元時空に容易に拡張することができる.

$\mathbf{H}^{p+2}$

H^{p+2} は $SO(1,p+2)$ 対称性をもち，

$$ds^2_{p+3} = -dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{p+2}^2\ , \tag{6.34}$$

$$-X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{p+2}^2 = -L^2\ , \tag{6.35}$$

で定義される.

$$X_0 = L\cosh\rho, \quad X_i = L\sinh\rho\,\Omega_i \tag{6.36}$$

$$(i = 1, \ldots, p+2, \textstyle\sum_{i=1}^{p+2}\Omega_i^2 = 1)$$

という座標系では

$$\frac{ds^2}{L^2} = d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega_{p+1}^2\ . \tag{6.37}$$

$\mathbf{AdS_{p+2}}$ 時空

AdS_{p+2} 時空は $SO(2,p+1)$ 対称性をもち，

$$ds_{p+3}^2 = -dX_0^2 - dX_{p+2}^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{p+1}^2 \ , \tag{6.38}$$

$$-X_0^2 - X_{p+2}^2 + X_1^2 + \cdots + X_{p+1}^2 = -L^2 \ , \tag{6.39}$$

で定義される．AdS_2 時空と同様に，$X_{\mathrm{E}} = iX_{p+2}$ とすると H^{p+2} にユークリッド化される．

AdS_{p+2} 時空のグローバル座標は

$$X_0 = L\cosh\rho\cos\tilde{\tau} \ , \quad X_{p+2} = L\cosh\rho\sin\tilde{\tau} \ , \quad X_i = L\sinh\rho\,\Omega_i \tag{6.40}$$

$(i = 1, \ldots, p+1, \sum_{i=1}^{p+1} \Omega_i^2 = 1)$

で与えられ，計量は

$$\frac{ds^2}{L^2} = -\cosh^2\rho\, d\tilde{\tau}^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega_p^2 \ . \tag{6.41}$$

グローバル座標系以外の座標系も，AdS_2 時空と同様にとることができる．静的座標では

$$\frac{ds^2}{L^2} = -(r^2+1)\, d\tilde{\tau}^2 + \frac{dr^2}{r^2+1} + r^2 d\Omega_p^2 \ . \tag{6.42}$$

コンフォーマル座標では

$$\frac{ds^2}{L^2} = \frac{1}{\cos^2\theta}(-d\tilde{\tau}^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\Omega_p^2) \ . \tag{6.43}$$

ポアンカレ座標は，AdS_{p+2} 時空の場合

$$X_0 = L\,\tilde{u}\,t \ , \tag{6.44a}$$

$$X_i = L\,\tilde{u}\,x_i \quad (i = 1, \ldots, p) \ , \tag{6.44b}$$

$$X_{p+1} = \frac{1}{2\tilde{u}}\left\{1 - \tilde{u}^2(L^2 - x_i^2 + t^2)\right\} \ , \tag{6.44c}$$

$$X_{p+2} = \frac{1}{2\tilde{u}}\left\{1 + \tilde{u}^2(L^2 + x_i^2 - t^2)\right\} \ , \tag{6.44d}$$

で定義され，

$$\boxed{\frac{ds^2}{L^2} = \tilde{u}^2(-dt^2 + d\boldsymbol{x}_p^2) + \frac{d\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2}} \tag{6.45}$$

AdS_{p+2} 時空は負の宇宙定数 $\Lambda = -p(p+1)/(2L^2)$ をもつアインシュタイン方程式の解である：

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R + \Lambda g_{MN} = 0 \ . \tag{6.46}$$

dS_{p+2} 時空

dS_{p+2} 時空は $SO(1,p+2)$ 対称性をもち，

$$ds_{p+3}^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{p+2}^2 \ , \tag{6.47}$$

$$-X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{p+2}^2 = +L^2 \ . \tag{6.48}$$

で定義される．dS_2 時空と同様に，$X_{\mathrm{E}} = iX_0$ とすると S^{p+2} にユークリッド化される．

$$X_0 = L\sinh\tilde{\tau}, \quad X_i = L\cosh\tilde{\tau}\,\Omega_i \tag{6.49}$$

$$(i = 1, \ldots, p+1, \textstyle\sum_{i=1}^{p+1}\Omega_i^2 = 1)$$

という座標系では

$$\frac{ds^2}{L^2} = -d\tilde{\tau}^2 + \cosh^2\tilde{\tau}\,d\Omega_{p+1}^2 \ . \tag{6.50}$$

dS_{p+2} 時空は正の宇宙定数 $\Lambda = p(p+1)/(2L^2)$ をもつアインシュタイン方程式 (6.46) の解である．

6.2 AdS 時空での粒子の運動♦

AdS 時空はなかなか直感が働きにくいので，最初に読むときはとばしても差しつかえない．

重力赤方偏移

まず，静的座標で AdS 時空での重力赤方偏移を考える．原点 $r=0$ に静止した観測者 A と，$r = r_B \gg 1$ に静止した観測者 B がいるとする．式 (2.37) を使うと，A が発した光子のエネルギーは B にとって

$$E_B \simeq \left(\frac{1}{r_B}\right) E_A \tag{6.51}$$

となる．したがって，B にとって光子のエネルギーは減少する．とくに $r_B \to \infty$ の場合，$E_B \to 0$ なので，光子は無限の赤方偏移を受ける．重力赤方偏移は重力ポテンシャルによる効果なので，このことは $r=0$ が重力ポテンシャルの「底」にあたることを意味する．なお，光子が無限の赤方偏移を受けるのはホライズンと似ているが，AdS 時空はブラックホールではない．

光子の運動

AdS 時空での光子や粒子の運動を調べてみよう．このような解析は，2.3.2 節でのシュワルツシルド・ブラックホールでの粒子の運動と同様におこなえるが，

AdS 時空では粒子は奇妙な振るまいをする．いま，静的座標で重力ポテンシャルの底 $r=0$ から $r=\infty$ に向かって運動する粒子を考える．以下，簡単のために $L=1$ とする．

まず光子の運動を，座標時間 $\tilde{\tau}$ の立場で調べる．これはコンフォーマル座標を使うと簡単で，

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}(-d\tilde{\tau}^2 + d\theta^2) = 0 \to \frac{d\theta}{d\tilde{\tau}} = 1 \ . \tag{6.52}$$

$r=\tan\theta$ なので，$r:0\to\infty$ は $\theta:0\to\pi/2$ に相当し，

$$\tilde{\tau} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \ . \tag{6.53}$$

すなわち，座標時間 $\tilde{\tau}$ では有限時間で AdS 境界に到達する．AdS 境界での振るまい（たとえば原点に戻ってくるかどうか）は AdS 境界での境界条件次第である．AdS 境界での境界条件が必要なことがわかる．

一方,「固有時間」の立場 τ では（光子に対しては τ を固有時間として解釈できないので，アフィンパラメータという意味である）

$$g^{00}E^2 + g_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0 \ . \tag{6.54}$$

光子に対しては $p_0 =: -E$ として E を定義した．

$$-\frac{E^2}{r^2+1} + \frac{1}{r^2+1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0 \to \frac{dr}{d\tau} = E \ . \tag{6.55}$$

したがって，$r=E\tau$，つまり光子が AdS 境界に到達するのは，アフィンパラメータでは無限の「時間後」である．

粒子の運動

粒子の場合，まず固有時間 τ の立場では，

$$g^{00}E^2 + g_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -1 \ \to \ -\frac{E^2}{r^2+1} + \frac{1}{r^2+1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -1 \tag{6.56}$$

$$\to \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (E^2-1) - r^2 \ . \tag{6.57}$$

原点 $r=0$ で式 (6.57) の右辺が正であるように，$E>1$ ととる．しかし，$r\to\infty$ で右辺は負になってしまうので，粒子は $r\to\infty$ に到達できない．AdS 時空によるポテンシャル障壁の効果である．転回点は $r_* = \sqrt{E^2-1}$ で与えられる．

$$\tau = \int_0^{r_*} \frac{dr}{\sqrt{(E^2-1)-r^2}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} \ . \tag{6.58}$$

ここで $r =: \sqrt{E^2-1}\sin\varphi$ とした．

一方，座標時間 $\tilde{\tau}$ の立場では，$p^0 = m d\tilde{\tau}/d\tau$, $p^0 = g^{00}p_0 = -mg^{00}E$ より，

$$\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = \frac{E}{-g_{00}} \ . \tag{6.59}$$

式 (6.58) を使うと,

$$\tilde{\tau} = E\int_0^{r_*} \frac{dr}{(r^2+1)\sqrt{(E^2-1)-r^2}} = E\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(E^2-1)\sin^2\varphi+1} = \frac{\pi}{2}. \tag{6.60}$$

以上より，粒子は光子が戻ってくるのと同じ座標時間 $\tilde{\tau} = \pi$ で戻ってくる．これは粒子の固有時間 τ でも同じである．また，粒子が戻ってくるまでの時間は，エネルギー E によらない．r_* の定義より，E が大きいほど粒子は遠くまで到達するが，かかる時間は同じである．

ポアンカレ座標について

座標時間 $\tilde{\tau}$ の立場だけではなく，ポアンカレ座標の時間 t の立場でも調べてみよう．簡単のために光子の運動だけを考える．今度は，$\tilde{u} = R$ から $\tilde{u} = 0$ への運動を考えることにする．まず，座標時間 t の立場では，

$$ds^2 = -\tilde{u}^2 dt^2 + \frac{d\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2} = 0 \to \frac{d\tilde{u}}{dt} = -\tilde{u}^2 \tag{6.61}$$

なので,

$$t = -\int_R^{\epsilon} \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^2} = \frac{1}{\tilde{u}}\bigg|_R^{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{R} \to \infty \ . \tag{6.62}$$

したがって，$\tilde{u} = 0$ に到達するには無限の座標時間 t がかかる．

しかし，アフィンパラメータ τ の立場ではそうではない．式 (6.55) と同様に,

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = -E \tag{6.63}$$

なので，$\tilde{u} = R$ から $\tilde{u} = 0$ までは有限アフィンパラメータで到達する．

ポアンカレ座標の振るまいは，シュワルツシルド座標の振るまいと似ている．まず，$\tilde{u} = 0$ まで有限アフィンパラメータで到達するのだから，ポアンカレ座標は AdS 時空の一部しかカバーしない座標系である．ポアンカレ座標系がカバーする範囲を**ポアンカレ・パッチ**と呼ぶ．AdS 時空全体の立場から言うと，$\tilde{u} = 0$ で $t \to \infty$ となるのは，シュワルツシルド座標同様，座標系の問題である．

これらの意味で，$\tilde{u} = 0$ はホライズンと似ているが，シュワルツシルド・ブラックホールのホライズンとはやや性格が異なる．コンフォーマル座標では，AdS 境界に影響を及ぼせない領域はないからである（図 6.4）．ポアンカレ座標は，むしろ**リンドラー時空**と呼ばれる時空に似ている：

$$ds_{p+2}^2 = -r dt^2 + \frac{dr^2}{r} + d\boldsymbol{x}_p^2 \ . \tag{6.64}$$

リンドラー時空は一見するとそうはみえないかもしれないが，ミンコフスキー

時空そのものであり，ただしミンコフスキー時空の一部しかカバーしていない座標系である．物理的には，加速度一定の観測者にとっての座標系であり，この観測者にとってのホライズンがある ($r=0$)．しかし，ミンコフスキー時空全体としてみた場合，ホライズンがあるわけではない．

同様に，$\tilde{u}=0$ はポアンカレ・パッチ内の観測者にとってはホライズンだが，AdS 時空全体でみた場合，ホライズンがあるわけではない．つまり，$\tilde{u}=0$ がホライズンかどうかは，立場の問題である．別の例として，極限 RN ブラックホールで near-horizon 極限をとると，ポアンカレ座標での AdS_2 時空があらわれる（3.3.2 節）．この場合の $\tilde{u}=0$ は，実際の RN ブラックホールのホライズンにあたる．なお，リンドラー時空は有限温度をもつが，ポアンカレ座標の AdS 時空は温度ゼロである．

6.3 AdS/CFT での解釈について

AdS 時空の対称性について

ポアンカレ座標での AdS_5 時空をあらためて書くと[*3]，

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2} \ . \tag{6.65}$$

この時空は $SO(2,4)$ 対称性をもつが，対称性の一部はポアンカレ座標で容易に読みとれ，また物理的にも重要である：

1. **ポアンカレ対称性**：計量は $x^\mu = (t,x,y,z)$ に対する $ISO(1,3)$ ポアンカレ対称性をもつ．これが 4 次元時空のゲージ理論のポアンカレ対称性に相当し，したがって x^μ がゲージ理論の座標と解釈する．同様に，一般の AdS_{p+2} 時空の場合，p はゲージ理論の空間次元をあらわしている．
2. **スケール対称性**：計量は，

$$\boxed{x^\mu \to a x^\mu, \quad r \to \frac{1}{a} r} \tag{6.66}$$

という変換の下で不変である．

スケーリング (6.66) の下で，r は t に共役なエネルギーと同じ変換性をもつ．ゲージ理論の時空が 4 次元で，重力理論の時空が 5 次元なのは，これが一つの理由である．つまり，r 座標はゲージ理論のエネルギースケールという意味をもつ．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論もスケール対称性をもつが，重力理論ではこれを幾何的に実現しているのである．

---

*3) これまで座標は無次元量であるようにとってきたが，以下では次元をもつようにとる．また，動径座標をあらためて r と書くことにするが，静的座標の r ではなく，ポアンカレ座標の $\tilde{u}$ に相当する．

ゲージ理論の立場でのエネルギーをもう少し調べてみよう．AdS/CFT の場合，ゲージ理論の時間に相当するのは座標 t であり固有時間 τ ではない．位置 r に静止した観測者にとっての固有時間 τ_r と座標 t のあいだには，

$$d\tau_r^2 = |g_{00}(r)|dt^2 \tag{6.67}$$

の関係があるので，r の観測者にとっての固有エネルギー $E(r)$ とゲージ理論のエネルギー E_t の関係は

$$E_t = \sqrt{|g_{00}(r)|}E(r) = \left(\frac{r}{L}\right)E(r) \tag{6.68}$$

となる*4)．固有エネルギー $E(r)$ が同じであっても，動径方向の位置 r 次第で，ゲージ理論としてのエネルギーは異なる．AdS 境界に近づくにつれて，ゲージ理論でのエネルギーは増大する．式 (6.68) の関係を，**UV/IR 関係式**と呼ぶ．

座標時間は座標系によるので，一般相対論では座標時間をあまり重要視することはなく，むしろ座標によらない固有時間を重要視する．しかし，AdS/CFT では座標時間 t にはゲージ理論の時間という特別な意味づけがあるので，**ゲージ理論の解釈の際には** t **を使う**．

ホーキング温度についての注意♦

同様の注意は，7 章で考える AdS ブラックホールの熱力学量についても言える．たとえば，ホーキング温度は虚時間 $t_{\rm E}$ に対する周期性から決まったので，ホーキング温度は座標 t の立場で測った温度である．

ホーキング温度 T と，r にいる観測者にとっての温度とは異なる．r にいる観測者の固有時間 τ_r と t のあいだには，式 (6.67) の関係があるので，**固有温度** $T(r)$ は

$$T(r) = \frac{1}{\sqrt{|g_{00}(r)|}}T \tag{6.69}$$

となる．漸近的平坦なブラックホールの場合，$r \to \infty$ で $|g_{00}| \to 1$ となるので，無限遠の観測者にとっての固有温度とホーキング温度は一致する．しかし，AdS ブラックホールでは $r \to \infty$ で $|g_{00}| \propto r^2$ となるので，無限遠の観測者にとって固有温度はゼロである*5)．

AdS/CFT の場合，座標 t にはゲージ理論の時間という意味づけがある．そこで，今後温度と言う場合も，固有温度ではなく，ホーキング温度（ゲージ理論の温度）を使い続ける．

---

*4) この式は，重力赤方偏移の式 (6.51) と表面上同じだが，やや解釈が違うことに注意．重力赤方偏移は動径座標の違う場所での固有エネルギーどうしを比べているが，UV/IR 関係式はある動径座標での固有エネルギーと座標 t に共役なエネルギーを比べている．

*5) これは無限遠の観測者にとっての表面重力とも一致する．表面重力の議論では，無限遠で時空が平坦になることを使っていた（式 (3.11) の最後の式で $f(\infty) = 1$ を使っている）．AdS 時空の場合は，この点の違いから無限遠の観測者にとっての表面重力はゼロになる．もとの表面重力 $f'(r_0)/2$ に相当するのは，t 座標の立場である．

第 7 章
AdS/CFT–平衡系の場合

本章では，シュワルツシルド AdS ブラックホールの熱力学量を計算し，AdS/CFT を使うことで，強結合の $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の熱力学量を求める．さらに，結果を弱結合の場合と比較する．

7.1　AdS ブラックホール

AdS 時空にもブラックホールが存在しうる．もっとも簡単な AdS ブラックホールは，**シュワルツシルド AdS ブラックホール**と呼ばれる（以下，SAdS と略）．シュワルツシルド・ブラックホールと同じように，球形のホライズンをもったブラックホールを考えることもできるが（7.3 節），AdS 時空や高次元では，ホライズンのトポロジーとして，球形以外も許される*1)．とくに，ホライズンが無限に拡がっている場合もある．しばらくは，このようなブラックホールについて考える．

AdS_5 時空同様，$SAdS_5$ ブラックホールは負の宇宙定数をもつアインシュタイン方程式 (6.46) の解であり，

$$ds_5^2 = -\left(\frac{r}{L}\right)^2 h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r}{L}\right)^2 h(r)} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 (dx^2+dy^2+dz^2) \ , \tag{7.1}$$

$$h(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \ , \tag{7.2}$$

で与えられる．ホライズンの位置は $r=r_0$ である．$r_0=0$ のとき，ポアンカレ座標での AdS_5 時空に帰着する．g_{00} は $r_0^4/(L^2r^2)$ という項を含むが，$O(r^{-2})$ の振るまいは，5 次元のニュートン・ポテンシャルの振るまいから来る．

(x,y,z) は $\mathbb{R}^3$ の座標である．シュワルツシルド・ブラックホールではこの

*1)　4 次元の漸近的平坦なブラックホールで，物質場に対して適当な条件の下では，ホライズンのトポロジーは S^2 に限られる．これは**トポロジー定理**として知られ，ノー・ヘア定理の一種である（文献 [18] の Proposition 9.3.2 を参照）．

部分は $r^2 d\Omega^2$ となっていて，球形のホライズンをあらわした．いまの場合は，$r = r_0$ のホライズンが (x, y, z) 方向に無限に拡がっていることになる．このようなホライズンを**プラナー・ホライズン** (planar horizon) と呼ぶ．また，プラナー・ホライズンをもつブラックホールは，しばしば**ブラックブレーン**と呼ばれる．

AdS 時空は定曲率時空だったが，SAdS ブラックホールは定曲率時空ではない．たとえば，$r = 0$ は時空特異点である．

また，AdS 時空は $x^\mu \to ax^\mu$, $r \to r/a$ のスケーリングの下で不変だったが，SAdS ブラックホールは不変ではない．しかし，このスケーリングの下で，

$$ds_5^2 \to -\left(\frac{r}{L}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{ar_0}{r}\right)^4\right\} dt^2 + \cdots \tag{7.3}$$

となるので，ホライズン半径 r_0 を変えることができる．つまり，ホライズン半径が違うブラックホールもすべて等価である．7.2 節でみるように，このブラックホールの温度は $T \propto r_0$ なので，温度も $T \to aT$ と変えることができる．したがって，どの温度も等価であり，物理も同じである（ゼロ温度以外は）．つまり，相転移温度のような特徴的な温度はない*2)．ゲージ理論の立場では，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論はスケール対称性をもち，温度以外に次元をもった量がないからである．

さらに，AdS 時空には x^μ に対するローレンツ対称性があったが，SAdS ブラックホールの場合，t 方向と (x, y, z) 方向の計量が異なるので，ローレンツ対称性も回転対称性 $SO(3)$ に落ちている．これも有限温度の理論に典型的な事情である．

7.2 AdS ブラックホールの熱力学量

7.2.1 熱力学量

AdS ブラックホールの熱力学量を求める．AdS/CFT によれば，これは強結合での $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の熱力学量と解釈される．ただし，ブラックホールの結果をゲージ理論の結果に焼き直すには，ゲージ理論と重力理論のパラメータがどう結びつくのかを知っておく必要がある．5.4.4 節で議論したように，この「AdS/CFT 辞書」は

$$\boxed{N_c^2 = \frac{\pi}{2}\frac{L^3}{G_5}\,, \quad \lambda = \left(\frac{L}{l_s}\right)^4} \tag{7.4}$$

ここで，左辺はゲージ理論のパラメータ，右辺は重力理論のパラメータである．

*2) 有限温度の場合スケール対称性はないが，以上のような意味で今後も大ざっぱにスケール不変という呼び方をする．

まず温度は，式 (3.25) より

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{f'(r_0)}{4\pi} && (7.5)\\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{L^2}\left(2r+\frac{2r_0^4}{r^3}\right)\bigg|_{r=r_0} && (7.6)\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{r_0}{L^2}\ . && (7.7)
\end{aligned}
$$

このブラックホールでは，ホライズンが無限に拡がっているので，エントロピーそのものよりもエントロピー密度 s の方が適切である．(x,y,z) 方向の単位長さあたりの固有面積を a とすると，面積則 (3.20) は

$$
s = \frac{a}{4G_5} \tag{7.8}
$$

となる．いまの場合，$a=(r_0/L)^3$ なので

$$
s = \frac{1}{4G_5}\left(\frac{r_0}{L}\right)^3\ . \tag{7.9}
$$

これは温度 (7.7) と AdS/CFT 辞書を使うと

$$
\boxed{s = \frac{\pi^2}{2}N_c^2T^3} \tag{7.10}
$$

残りの熱力学量は，熱力学関係式から求めることができる．まず第一法則 $d\varepsilon = Tds$ を使うことで，エネルギー密度 ε が求まる：

$$
\varepsilon = \frac{3}{8}\pi^2N_c^2T^4\ . \tag{7.11}
$$

またオイラーの関係式 $\varepsilon = Ts - P$ から圧力 P が求まる：

$$
P = \frac{1}{8}\pi^2N_c^2T^4 \quad \to \quad \boxed{P = \frac{1}{3}\varepsilon} \tag{7.12}
$$

ここでは面積則と熱力学関係式から熱力学量を求めたが，ブラックホールの分配関数を評価して求めることもできる（7.4 節）．

これは簡単な計算だが，これらの結果からいろいろなことがわかる：

温度依存性

$\varepsilon \propto T^4$ は，**ステファン–ボルツマンの法則**をあらわしている．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論はスケール不変な理論であり，温度以外に次元をもった量がない．したがって，場の理論の立場から言ってステファン–ボルツマンの法則になるのは当然であり，非自明なのは比例係数である．この比例係数が自由場のときにどうなるかは以下で議論する．

しかし，ブラックホールの立場から言って，ステファン–ボルツマンの法則に

なるのは自明ではない．たとえば，(5 次元) シュワルツシルド・ブラックホールでは $M \propto 1/T^2$ なので，ステファン–ボルツマン型とはまったく違った形をしている．

さらにこのような形をもつ帰結として，シュワルツシルド・ブラックホールでは比熱 C が負になる ($C := dM/dT < 0$)．このため，熱平衡状態が安定に存在しない．これは何もこのブラックホールに限らず，一般に重力系の特徴である．重力系では，平衡から少しゆらぎがあると，そのゆらぎは緩和するどころかますます成長し，さらに平衡から外れていく．もちろん，これこそが我々の宇宙が熱平衡にはない理由の一つで，太陽や地球といった物体を生む原動力である*3)．したがって，通常のブラックホールは，ゲージ理論のような通常の統計力学系と対応することはありえない．この意味で， AdS ブラックホールはきわめて特別である．

このような違いが生まれる一因は，シュワルツシルド・ブラックホールでは G, M 以外にスケールをもつ量がないことと関係する．一方，AdS ブラックホールでは，AdS 半径 L というスケールが新たに存在する．あらためて両者の式を眺めると

(5 次元) シュワルツシルド $$M \simeq \frac{1}{G_5 T^2}\,, \tag{7.13}$$

(5 次元) シュワルツシルド AdS $$\varepsilon = \frac{(\pi L)^3}{4G_5} T^4\,. \tag{7.14}$$

AdS/CFT 辞書 (5.42) からわかるように，L が G_5 とあわせ，無次元量になる．このため，ステファン–ボルツマンの法則が出てくる余地がある．あるいは，シュワルツシルド・ブラックホールの場合，ニュートン定数 G_5 がどうしても残ってしまうため，ステファン–ボルツマンの法則にならないとも言える．

また，ブラックホール・エントロピーが 4 次元の統計力学的なエントロピーとして自然に解釈できるのは，ブラックホールが 5 次元時空にいるからだという点にも注意してほしい．通常の統計力学系とは違い，ブラックホール・エントロピーは系の体積に比例せず，ホライズンの面積に比例する．このため 5 次元ブラックホールのエントロピーは，$(3+1)$ 次元量のエントロピーとして自然に解釈できるのである．

N_c^2 依存性

エントロピー密度が $O(N_c^2)$ であることは，ゲージ理論が非閉じ込めのプラズマ相にあることを意味する．$SU(N_c)$ ゲージ理論のカラーの自由度は，$O(N_c^2)$ だからである．一方，閉じ込め相では $SU(N_c)$ 1 重項のみがエントロピー密度

*3) 重力が長距離力であることが，ここでの議論の本質である．シュワルツシルド・ブラックホールも十分に小さな「箱」に閉じこめると，安定化する．AdS ブラックホールの場合，ポテンシャル障壁があるので，長距離力が遮断される (6.2 節)．

に寄与するため，自由度は N_c の関数になるわけではない．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論はスケール不変な理論であるため，プラズマ相しか存在しない．

エネルギー密度と圧力の関係

ε と P の簡単な関係 $\varepsilon = 3P$ も，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のスケール対称性から来る．スケール対称性はエネルギー・運動量テンソルがトレースレス $T^\mu_{\ \mu}=0$ になることを要求するからである．これをみるには，スケール変換 $x^\mu \to ax^\mu$ が，計量のスケール変換 $g_{\mu\nu} \to a^2 g_{\mu\nu}$ と同等であることに注意すればいい．エネルギー・運動量テンソルの定義

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{7.15}$$

を使うと，作用がスケール変換 $\delta g_{\mu\nu} = \epsilon g_{\mu\nu}$ の下で不変であれば

$$0 = \delta\mathcal{S} = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}(\epsilon g_{\mu\nu}) \propto T^\mu_{\ \mu}\ . \tag{7.16}$$

係数と弱結合との比較

AdS/CFT の結果と比較するために，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のエントロピー密度を弱結合で計算しておこう．これはゲージ理論の自由度を勘定すれば，すぐに求まる．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論は，ゲージ場と 6 つの随伴スカラー場をもつので，ボゾンの自由度は $N_{\text{boson}} = (2+6)\times N_c^2$ である．この理論には随伴フェルミオンもあるが，超対称性からフェルミオンの自由度はボゾンの自由度と同じである ($N_{\text{fermion}} = N_{\text{boson}}$)．したがって，エントロピー密度は通常の光子気体と同様に（7.2.2 節）

$$s_{\text{free}} = \frac{2\pi^2}{45}N_{\text{dof}}T^3 = \frac{2\pi^2}{3}N_c^2T^3\ . \tag{7.17}$$

ここで N_{dof} は有効自由度で，$N_{\text{dof}} = N_{\text{boson}} + (7/8)N_{\text{fermion}} = 15N_c^2$ である（7.2.2 節でみるように，7/8 の因子はボゾンとフェルミオンでの分配関数の違いからくるもの）．

式 (7.10) と式 (7.17) は同じ関数形だが，係数が違っている．両者は

$$\boxed{s_{\text{BH}} = \frac{3}{4}s_{\text{free}}} \tag{7.18}$$

という関係になっている [19]．3/4 というファクターはブラックホールの計算，すなわち AdS/CFT での計算がラージ N_c 極限であり，弱結合ではないことに起因していると考えられる．すなわち AdS/CFT によると，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のエントロピーは，強結合で弱結合の 3/4 になることを予言している．強結合のゲージ理論を計算する手法は限られているため，この予言を確認することは簡単ではないが，格子数値計算でも似たような傾向がみられている（11 章）．

7.2.2 弱結合極限での計算

自由粒子の分配関数を考える．エネルギー準位を ω_i, ω_i を占める粒子数を n_i とする．$n_1, n_2, \ldots$ で指定される 1 つの微視的状態のエネルギーは，$E(n_1, n_2, \ldots) = \sum_i n_i\omega_i$ である．分配関数は，

$$Z = \sum e^{-\beta E(n_1,n_2,\ldots)} = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots e^{-\beta(n_1\omega_1+n_2\omega_2+\cdots)} . \tag{7.19}$$

ここで，$\beta := 1/T$ である．ボソンに対しては，n_i は 0 から ∞ までとるので，

$$Z_{\mathrm{B}} = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta n_1\omega_1}\right) \times \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{\beta\omega_i}} . \tag{7.20}$$

$V \to \infty$ 極限で和を積分に置きかえて，

$$\begin{aligned}
\ln Z_{\mathrm{B}} &= -\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-e^{-\beta\omega_i}) && (7.21)\\
&\to -V\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \ln(1-e^{-\beta\omega}) && (7.22)\\
&= -\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi \int_0^{\infty} dq\, q^2 \ln(1-e^{-\beta q}) && (7.23)\\
&= -\frac{V}{2\pi^2}\frac{1}{\beta^3}\int_0^{\infty} dx\, x^2 \ln(1-e^{-x}) , \quad (x := \beta q) && (7.24)\\
&= V\frac{\pi^2}{90\beta^3} . && (7.25)
\end{aligned}$$

式 (7.23) では質量ゼロ粒子の分散関係 $\omega = |q|$ を使った．式 (7.24) の積分は

$$\int_0^{\infty} dx\, x^2 \ln(1-e^{-x}) = -\frac{\pi^4}{45} , \quad \int_0^{\infty} dx\, x^2 \ln(1+e^{-x}) = \frac{7\pi^4}{360} \tag{7.26}$$

を使った．したがって，熱力学量は

$$\varepsilon_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{V}\frac{\partial \ln Z_{\mathrm{B}}}{\partial\beta} = \frac{\pi^2}{30\beta^4} , \tag{7.27}$$

$$s_{\mathrm{B}} = \frac{1}{V}\ln Z_{\mathrm{B}} + \beta\varepsilon_{\mathrm{B}} = \frac{2\pi^2}{45\beta^3} . \tag{7.28}$$

同様に，フェルミオンの場合，n_i は 0 か 1 だけをとるので，

$$Z_{\mathrm{F}} = (1+e^{\beta\omega_1}) \times \cdots = \prod_{i=1}^{\infty}(1+e^{\beta\omega_i}) , \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned}
\ln Z_{\mathrm{F}} &= \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1+e^{-\beta\omega_i}) && (7.30)\\
&\to V\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \ln(1+e^{-\beta\omega}) && (7.31)\\
&= \frac{V}{(2\pi)^3}4\pi \int_0^{\infty} dq\, q^2 \ln(1+e^{-\beta q}) && (7.32)\\
&= V\frac{7\pi^2}{720\beta^3} . && (7.33)
\end{aligned}$$

したがって,

$$\ln Z_{\mathrm{F}} = \frac{7}{8} \ln Z_{\mathrm{B}} \ . \tag{7.34}$$

7.3 球形のホライズンをもつ AdS ブラックホール

球形のホライズンをもつ AdS ブラックホールは,

$$ds_5^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}} + r^2 d\Omega_3^2 \tag{7.35}$$

で与えられる. $r_0 = 0$ のとき, 計量は静的座標での AdS_5 時空に帰着する. ホライズンの位置 $r = r_+$ は,

$$\frac{r_+^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r_+^2} = 0 \to r_0^4 = r_+^4 + L^2 r_+^2 \ . \tag{7.36}$$

プラナー・ホライズンと違い, この場合ホライズン半径が違うブラックホールは等価ではない. とくに, ホライズン半径が大きい極限が, 式 (7.1) のプラナー・ブラックホールに相当する. これをみるため, スケール変換 $t \to at$, $r \to r/a$ をして $a \to 0$ 極限を考える. また, ブラックホールが大きい極限を考えたいので, スケール変換の下でホライズンの座標位置 r_+ をほぼ一定に保つことにする. このためには, $r_+ \to r_+/a$, r_0 に対しては $r_0 \to r_0/a$ と変換することになる (ブラックホールが大きい極限なので, 式 (7.36) の $O(r_+^4)$ だけ考慮すればよい). したがって,

$$ds_5^2 \to -\left(\frac{r^2}{L^2} + a^2 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{L^2} + a^2 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}} + \left(\frac{r}{a}\right)^2 d\Omega_3^2 \ . \tag{7.37}$$

スケーリングしても, もとの計量 (7.35) には帰着しない. また, S^3 ホライズンの半径は r/a と増大するので, $a \to 0$ 極限では平坦な座標系を使って $(r/a)^2 d\Omega_3^2 \simeq (r/L)^2 d\boldsymbol{x}^2$ と近似できる. こうして得られた計量は, プラナー・ブラックホールのものである.

このブラックホールの場合, 違うホライズン半径は等価ではないので, どの温度も等価というわけではない. 実際, あとで相転移を起こすことをみる (13.2 節).

なお, いまはあまり気にする必要はないが, 今後主にプラナー・ホライズンを考える理由は以下のとおりである:

1. 5.4 節で D3 ブレーンの near-horizon 極限から出てきたブラックホールは, プラナー・ホライズンの場合である.
2. (x, y, z) がゲージ理論の空間座標に対応するので, プラナー・ホライズンは通常の $\mathbb{R}^3$ 上のゲージ理論に対応する. 一方, コンパクトなホライズンをもつブラックホールは, コンパクトな空間上のゲージ理論に対応する. コ

ンパクトなブラックホールは相転移など複雑な現象をもち，それ自体興味深い（13.2 節）．逆に言えば，もっと複雑な物理をもつので，あと回しにする．

3. あとで流体力学的な解析のために，ブラックホールに摂動を加え，低エネルギー・長波長極限 $\omega \to 0, q \to 0$ を考える．しかし，コンパクトなブラックホールでは，摂動の波長はブラックホールのスケール程度にならざるをえない．

   数学的には，ブラックホール時空上で ϕ という場の摂動を考えたとすると，プラナー・ホライズンの場合は平面波 $\phi \propto e^{-i\omega t+iqz}$ で分解できる．この場合，$(\omega \to 0, q \to 0)$ 極限をとるのに問題はない．一方，球形のホライズンの場合は球面調和関数で分解する．S^2 のホライズンをもつ場合は，$\phi \propto Y_{lm}(\theta, \varphi)$ と分解する．その結果スペクトルが離散的になるので，このような極限操作ができない．

7.4 補遺：AdS ブラックホールの熱力学量の計算♦

ここでは，実際に重力場の作用から出発して，シュワルツシルド AdS_5 ブラックホールに対して分配関数を鞍点近似で評価する．そこから 7.2 節の熱力学量が導かれる．

まず，重力場の場合，作用は形式的に 3 つの部分に分けられる：

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}} = \mathcal{S}_{\mathrm{bulk}} + \mathcal{S}_{\mathrm{GH}} + \mathcal{S}_{\mathrm{CT}} \ . \tag{7.38}$$

ここで，$\mathcal{S}_{\mathrm{bulk}}, \mathcal{S}_{\mathrm{GH}}, \mathcal{S}_{\mathrm{CT}}$ は，それぞれバルク作用，ギボンズ–ホーキング作用，相殺作用と呼ばれる．以下，それぞれの項を説明し，SAdS_5 ブラックホールに対して評価する．座標系としては，以下のものを使う：

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (h dt_{\mathrm{E}}^2 + d\boldsymbol{x}^2) + L^2 \frac{dr^2}{hr^2} \ , \qquad h = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \ , \tag{7.39}$$

$$= \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \frac{1}{u^2} (h dt_{\mathrm{E}}^2 + d\boldsymbol{x}^2) + L^2 \frac{du^2}{hu^2} \ , \quad h = 1 - u^4 \ , \tag{7.40}$$

$(u := r_0/r)$．ここではユークリッド化した計量と作用を考えていることに注意．座標 r では，ブラックホールの「ホライズン」は $r = r_0$ に位置し，AdS 境界は $r = \infty$ に位置する．一方，座標 u では，「ホライズン」は $u = 1$，AdS 境界は $u = 0$ に位置する．

バルク作用

バルク作用は 5 次元時空での作用で，SAdS_5 ブラックホールの場合，通常のアインシュタイン–ヒルベルト作用である：

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}} = -\frac{1}{16\pi G_{p+2}} \int d^{p+2}x\, \sqrt{g}\, (R - 2\Lambda) \ , \tag{7.41}$$

$$2\Lambda = -\frac{p(p+1)}{L^2} \ . \tag{7.42}$$

SAdS_5 ブラックホールは $p=3$ の場合である．アインシュタイン方程式

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + \Lambda g_{MN} = 0 \tag{7.43}$$

で縮約をとると，

$$R = -\frac{(p+1)(p+2)}{L^2} \ . \tag{7.44}$$

したがって，on-shell バルク作用は

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}} = \frac{p+1}{8\pi G_{p+2} L^2} \int d^{p+2}x \sqrt{g} \tag{7.45}$$

となり，AdS 時空の体積に比例する*4)．SAdS_5 ブラックホールに対しては

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{bulk}} \quad &= \quad \frac{1}{2\pi G_5 L^2} \int_0^\beta dt \int d\boldsymbol{x} \int_u^1 du \frac{1}{u^5} &(7.46)\\
&\xrightarrow{u \to 0} \quad \frac{\beta V_3}{8\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} \left(\frac{1}{u^4} - 1 \right) \bigg|_{u=0} &(7.47)\\
&=: \quad \frac{\beta V_3}{16\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} \hat{\mathcal{S}}_{\text{bulk}} \ . &(7.48)
\end{aligned}$$

V_3 は $\boldsymbol{x}$ 方向の体積である（$x, y, z : 0 \to L_x, L_y, L_z$ とすると $V_3 := L_x L_y L_z$）．$\hat{\mathcal{S}}_{\text{bulk}}$ の前の因子は，ほかでも共通することが簡単に確かめられるので，以後 $\beta = V_3 = r_0 = L = 16\pi G_5 = 1$ とおいて計算を進める．

バルク作用は時空の体積に比例するため，$u \to 0$ で発散するが，この発散を消すための相殺項 $\mathcal{S}_{\text{CT}}$ を以下で加える．

ギボンズ–ホーキング作用

アインシュタイン–ヒルベルト作用に対し，変分原理を well-defined におこなうためには，以下の「表面項」をつけ加える必要があることが知られている（11.4 節）：

$$\mathcal{S}_{\text{GH}} = -\frac{2}{16\pi G_{p+2}} \int d^{p+1}x\, \sqrt{\gamma}\, K \ . \tag{7.49}$$

この作用を**ギボンズ–ホーキング作用**と言う [5]．表面項なので，運動方程式（アインシュタイン方程式）には寄与しない．ここで，

- $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu}|_{u \to 0}$.

---

*4) 簡単のため，以下では on-shell 作用であっても $\underline{\mathcal{S}}$ ではなく $\mathcal{S}$ と書くことにする．

- K は，境界での**外在的曲率** (extrinsic curvature) $K_{\mu\nu}$ のトレースである[*5]．

$$K = -\frac{\partial_u \sqrt{\gamma}}{N\sqrt{\gamma}} , \quad N^2 := g_{uu} . \tag{7.50}$$

N は**ラプス関数** (Lapse function) と呼ばれる．

SAdS$_5$ ブラックホールに対しては，$N^{-1} = uh^{1/2}$, $\sqrt{-\gamma} = u^{-4}h^{1/2}$ なので

$$\mathcal{S}_{\rm GH} = 2uh^{1/2}\left[u^{-4}h^{1/2}\right]'\Big|_{u=0} \xrightarrow{u\to 0} -\frac{8}{u^4} + 4\Big|_{u=0} . \tag{7.51}$$

ギボンズ–ホーキング作用からも発散の寄与があることに注意．

相殺作用

すでにみたように，バルク作用，ギボンズ–ホーキング作用は $u \to 0$ 極限で発散する．AdS/CFT の立場では，この発散は対応する場の理論の紫外発散として解釈される．その場合，発散を処理する方法は明らかで，作用に局所的な相殺項を有限個加えればよい．この場の理論の処方になぞらえて，重力理論の分配関数を有限にするために**相殺作用**を加える．この手続きを**ホログラフィックくり込み** (holographic renormalization) と言う[*6]．

したがって，相殺項は

- 境界上の量のみで書かれる（$\gamma_{\mu\nu}$ およびそれから作ったリッチ・スカラー $\mathcal{R}$ など[*7]）．
- 有限個の項からなる．
- これらの項の係数は，発散を消すために適切に選ばれる．

$p \leq 5$ のときは，相殺項は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\rm CT} = \frac{1}{16\pi G_{p+2}} \int d^{p+1}x \sqrt{\gamma} \Bigg\{ &\frac{2p}{L} + \frac{L}{p-1}\mathcal{R} \\ &- \frac{L^3}{(p-3)(p-1)^2}\left(\mathcal{R}^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{p+1}{4p}\mathcal{R}^2\right) + \cdots \Bigg\} .\end{aligned} \tag{7.52}$$

---

*5) 曲率には，内在的曲率 (intrinsic curvature) と外在的曲率があり，リーマン・テンソルは前者である．ある時空の外在的曲率は，その時空が埋め込まれる高次元時空の存在に依存している．リーマン・テンソルはそのような高次元時空に依拠しない内在的曲率である．一般相対論では，時空に曲面を埋め込んだり，正準形式で議論するために時空を曲面でスライスするときに，曲面の外在的曲率を考える．いまの場合，5 次元時空を $r =$（一定）で切った 4 次元超曲面（とりもなおさず境界理論が住む時空だが）の外在的曲率である．

*6) 相殺項は AdS スケール L を含むため，漸近的に AdS 時空ではない場合，この方法で発散を処理することはできない．とくに，通常の漸近的平坦なブラックホール（たとえばシュワルツシルド・ブラックホール）に対して使えない．この場合の処方の一つについては 13.2 節で議論する．

*7) これをバルク理論のリッチ・スカラー R と混同してはいけない．R_{MN} は $(p+2)$ 次元のテンソルであり，$\mathcal{R}_{\mu\nu}$ は $(p+1)$ 次元のテンソルである．

$p \leq 5$ のときは，ベキ発散を消すのに上記の項で十分であるが，対数発散を消すための新たな項が必要になる場合がある．プラナー・ホライズンの場合，$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ なので，実際には初項のみが熱力学量には寄与する：

$$\mathcal{S}_{\rm CT} = 6u^{-4}h^{1/2}\Big|_{u=0} \xrightarrow{u\to 0} \frac{6}{u^4} - 3\Big|_{u=0} \,. \tag{7.53}$$

分配関数と熱力学量

これまでの結果 (7.47), (7.51), (7.53) をまとめると，

$$\mathcal{S}_{\rm bulk} = \frac{2}{u^4} - 2\Big|_{u=0} \,, \tag{7.54a}$$

$$\mathcal{S}_{\rm GH} = -\frac{8}{u^4} + 4\Big|_{u=0} \,, \tag{7.54b}$$

$$\mathcal{S}_{\rm CT} = \frac{6}{u^4} - 3\Big|_{u=0} \,. \tag{7.54c}$$

これらをあわせて次元量を復活させると，

$$\underline{\mathcal{S}_{\rm E}} = -\frac{\beta V_3}{16\pi G_5}\frac{r_0^4}{L^5} \,. \tag{7.55}$$

on-shell 作用と，分配関数および自由エネルギーの関係は，

$$Z = e^{-\underline{\mathcal{S}_{\rm E}}} \,, \quad \underline{\mathcal{S}_{\rm E}} = \beta F \,. \tag{7.56}$$

$T = r_0/(\pi L^2)$ を使うと，

$$F = -\frac{V_3}{16\pi G_5}\frac{r_0^4}{L^5} = -\frac{(\pi L T)^4}{16\pi G_5 L}V_3 = -\frac{1}{8}\pi^2 N_c^2 T^4 V_3 \,. \tag{7.57}$$

この自由エネルギーより，熱力学量は，

$$s = -\frac{1}{V_3}\partial_T F = \frac{(\pi L T)^3}{4G_5} = \frac{1}{4G_5}\left(\frac{r_0}{L}\right)^3 = \frac{1}{2}\pi^2 N_c^2 T^3 \,, \tag{7.58a}$$

$$P = -\partial_{V_3} F = \frac{(\pi L T)^4}{16\pi G_5 L} = \frac{1}{16\pi G_5 L}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4 = \frac{1}{8}\pi^2 N_c^2 T^4 \,, \tag{7.58b}$$

$$\varepsilon = \frac{F}{V_3} + Ts = \frac{3(\pi L T)^4}{16\pi G_5 L} = \frac{3}{16\pi G_5 L}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4 = \frac{3}{8}\pi^2 N_c^2 T^4 \,. \tag{7.58c}$$

第 8 章

AdS/CFT–プローブを加えた場合

実験では，しばしば系に「プローブ」を加えて，プローブへの反応を調べる．また，一様な系に不純物を加えて系の性質がどう変わるかを調べることもある．本章では，AdS/CFT でこのようなプローブを加える方法について議論する．代表的な例として，ゲージ理論にプローブとしてのクォークを加え，クォーク・ポテンシャルの振るまいをみることにする．

8.1　ウィルソン・ループの初歩

ウィルソン・ループは，ゲージ理論の重要なオブザーバブルの一つであり，物理的にはクォーク・反クォークポテンシャルをあらわしている．例として，$U(1)$ ゲージ理論を考える．ゲージ変換は，

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x) \ , \tag{8.1}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \ , \tag{8.2}$$

で与えられる．局所的でないオペレーター，たとえば $\phi(x)\phi^*(y)$ は一般にゲージ不変ではなく，オブザーバブルではない．しかし以下の量はゲージ不変である：

$$\phi(x)e^{i\int_P dx^\mu A_\mu}\phi^*(y) \to \phi(x)e^{i\alpha(x)}e^{i\int_P dx^\mu(A_\mu+\partial_\mu\alpha)}e^{-i\alpha(y)}\phi^*(y) \ . \tag{8.3}$$

P は点 x と y をつなぐ任意の経路である（図 8.1 (a)）．あるいは，P として閉曲線をとれば，W_P だけでゲージ不変になる．そこで以下のようにオペレーターを定義する：

$$W_P(x,y) = e^{i\int_P dx^\mu A_\mu} \quad （ウィルソン・ライン）, \tag{8.4}$$

$$W_P(x,x) = e^{i\oint dx^\mu A_\mu} \quad （ウィルソン・ループ）. \tag{8.5}$$

ウィルソン・ループは，テスト電荷のゲージ場への結合をあらわす．粒子が電荷をもつ場合，カレントは

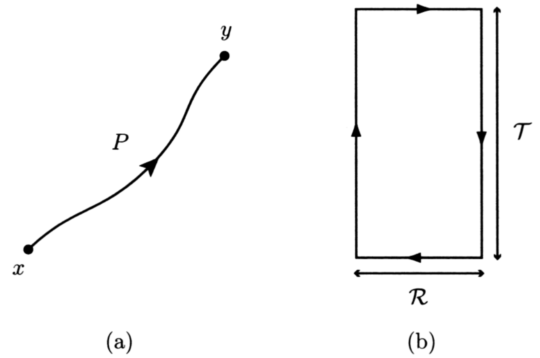


図 8.1　(a) 経路 P. (b) ウィルソン・ループはクォーク・反クォーク対をあらわす.

$$J^\mu(x) = \oint d\lambda \frac{dy^\mu}{d\lambda} \delta\left(x^\mu - y^\mu(\lambda)\right) \ . \tag{8.6}$$

電荷は $dy/d\lambda$ の符号で決まる．プラスの電荷に対し，$dy/d\lambda > 0$ ととっている．閉曲線 $y^\mu(\lambda)$ を考えると，$dy/d\lambda$ 正負両方の部分があるので，プラスとマイナスの電荷をあらわすことになる（図 8.1 (b)）．つまり，閉曲線は「クォーク・反クォーク」が対生成され，$\mathcal{R}$ の距離で $\mathcal{T}$ の時間，相互作用を起こし，また対消滅するプロセスをあらわす．J^μ を使うと，ウィルソン・ループは作用の摂動項の形に書ける：

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x\, A_\mu(x) J^\mu(x) = \oint d\lambda \frac{dy^\mu}{d\lambda} A_\mu(y(\lambda)) = \oint dy^\mu A_\mu(y) \ . \tag{8.7}$$

したがって，ウィルソン・ループはテスト電荷があるときの分配関数をあらわす：

$$\langle W_P \rangle = \frac{Z[J]}{Z[0]} \ . \tag{8.8}$$

このことから，ウィルソン・ループはクォーク・反クォーク対のポテンシャル・エネルギーを与えることがわかる．ユークリッド化した分配関数を形式的に

$$Z = \langle f | e^{-H\mathcal{T}} | i \rangle \tag{8.9}$$

と書き，完全系 $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ を使うと

$$Z = \sum_n e^{-E_n \mathcal{T}} \langle f|n\rangle\langle n|i\rangle \xrightarrow{\mathcal{T}\to\infty} e^{-E_0\mathcal{T}} \ . \tag{8.10}$$

つまり，ユークリッド化した分配関数は，$\mathcal{T} \to \infty$ の極限で基底状態のエネルギーを与える．そして，運動エネルギーが無視できるときは，ポテンシャル・エネルギーを与える*1)．したがって，

$$\langle W_P \rangle \simeq e^{-V(\mathcal{R})\mathcal{T}} \ . \tag{8.11}$$

*1)　$t_{\rm E} = it$ の下で，ミンコフスキー作用 $\mathcal{S}_L$，ユークリッド作用 $\mathcal{S}_E$，ポテンシャル V の関係は，$i\mathcal{S}_L = i\int dt(-V) = -\int dt_{\rm E} V = -\mathcal{S}_E$.

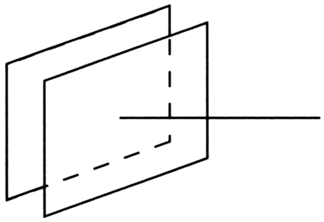


図 8.2　長いストリングは，重いクォークをあらわす.

図 8.1 (b) の水平部分は $O(\mathcal{R}/\mathcal{T}) \ll 1$ であることが示せる.

QCD のようにクォークの閉じこめが起こる場合，ポテンシャルは距離とともに増大する：$V(\mathcal{R}) \simeq \sigma\mathcal{R}(\mathcal{R} \gg 1)$. ここで σ はストリング・テンションと呼ばれる．したがって，

$$\langle W_P \rangle \simeq e^{-O(\mathcal{R}\mathcal{T})} = e^{-\sigma A} \ . \tag{8.12}$$

ループの面積 $A = \mathcal{R}\mathcal{T}$ に比例するこの振るまいを**面積則**と言う．一方，距離とともにポテンシャルが減衰するクーロン力の場合は，

$$\langle W_P \rangle \simeq e^{-O(\mathcal{R})} \quad (\mathcal{R} = \mathcal{T} \gg 1 \text{ の場合}) \tag{8.13}$$

と振るまい，これを "Perimeter law" と言う．このためウィルソン・ループは，閉じこめの判定条件を与える.

ここでは簡単のために $U(1)$ ゲージ理論だけを考えてきたが，同様の議論はヤン–ミルズ理論に対しても成立する.

8.2 AdS/CFT でのウィルソン・ループ：直観的理解

AdS/CFT でウィルソン・ループを考えよう．AdS/CFT での結果は，定性的には直観的に理解できる．そこで，実際に計算する前に，さまざまな状況でどのような結果が期待されるのかを説明する．そのあとで，直観的な理解を実際の計算で裏づける.

$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論にあらわれる物質場は随伴表現だけなので，まずクォークのような基本表現の物質場を AdS/CFT でどう加えるか考える必要がある．ここでは一つの簡単な方法を議論する.

図 5.14 (a) に戻ろう．開弦は D ブレーン上に端点をもつが，D ブレーンが複数枚あると，端点の置き方も N_c^2 あった．このことは，開弦があらわす場が $SU(N_c)$ の随伴表現に属することを意味した.

一方，無限に長いストリングを考えると（図 8.2），ストリングの端点の置き方は N_c である．このことは場が基本表現に属することを意味する．この意味で，長いストリングは「クォーク」をあらわす．ストリングは張力をもち伸び

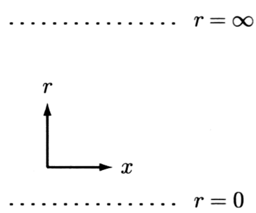


図 8.3　模式的に描いた AdS 時空．水平方向はゲージ理論の住む 3 次元空間の一つをあらわし，垂直方向は AdS 時空の動径方向をあらわす．動径方向は，$r=0$ から $r=\infty$ まで拡がっているが，図示する都合上縮めて描いている．

ているので，このようなストリングは無限に重い質量をもつ．つまり，このようなストリングは，無限に重いクォークをあらわすのである．以下では，このようなストリングを使って，ウィルソン・ループを議論することにする．

以前，強い力のストリング模型の欠点として，閉じこめ以外のポテンシャルがあらわされないという点を挙げた（5.1 節の問題 2）．ところが，AdS/CFT ではこの問題を回避できて，QCD の短距離で出てくるようなクーロン・ポテンシャルも出てくることをみる．AdS/CFT と単純なストリング模型が違う結論になるのは，5.1 節の問題 1 を回避した理由と基本的には同じで，以下でみるように曲がった時空の効果である．

まず，AdS/CFT でのクォーク・ポテンシャルの基本的な考え方を理解するために，一番簡単な AdS 時空の場合を考える．この場合はクーロン・ポテンシャルしか出ない．そのあと，もっと一般的な AdS 時空を考えると，閉じこめポテンシャルが出て閉じこめもあらわされること，またブラックホールの場合を考えるとプラズマ中での振るまいもあらわされることをみていく．

AdS 時空の場合

あらためて AdS 時空の計量を書くと（ポアンカレ座標），

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + \cdots) \tag{8.14}$$

と線素に r^2 の因子がかかっている点が特徴である．ゲージ理論での時間・長さは t, x の値で測られる（つまり r^2 の因子をかけない）．しかし，これは曲がった時空本来での線素とは違うという点がポイントである．クォーク・ポテンシャルの定性的な振るまいは，このことだけから理解できる．

図 8.3 は AdS 時空を模式的に描いたものである．クォーク間の距離を $\mathcal{R}$ とする ($\Delta x = \mathcal{R}$)．クォーク・ポテンシャルはクォークをつなぐストリングによってあらわされる．ストリングは張力をもっているので，ストリングの長さが最短になろうとする．一見すると，クォークを $r=\infty$ で水平に伸びたストリングでつなげれば良さそうに思える（図 8.4）．しかし，これではストリングの長さは最短にはならない．曲がった時空では，座標間隔が必ずしも本当の距離（固

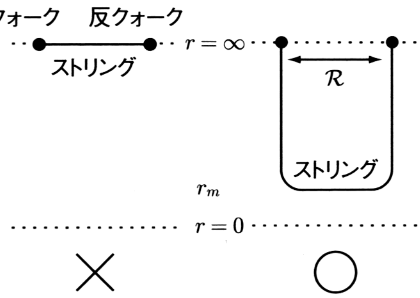


図 8.4　水平に伸びたストリング（左）は最低エネルギー状態ではなく，AdS 時空の内部に入ったものが最低エネルギー状態になる．

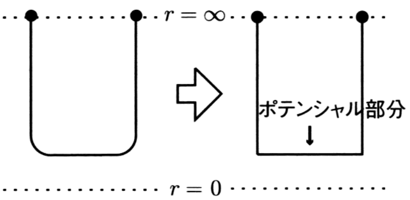


図 8.5　クォークをつなぐストリング（左）を近似的に長方形のストリングであらわす（右）．水平に伸びたストリングのエネルギーが，クォーク・ポテンシャルをあらわす．

有長さ）をあらわすわけではないからである．この図は固有長さを適切にあらわしてはいないので，この点注意が必要である．実は，AdS 時空の場合，いったん時空の内部 ($r \neq \infty$) に入った方がストリングの固有長さは短くなる[*2)]．

8.4 節の詳しい解析によると，このストリングは大ざっぱに言って 2 つの部分に分けられる．第一の部分はほぼ垂直に伸びた部分で，第二の部分はむしろほぼ水平に伸びた部分である．したがって，ここでは簡単化のために，このストリングを近似的に長方形のストリングで置きかえることにする（図 8.5）．このうち，クォーク・ポテンシャルに相当するのは，第二の部分である．クォーク間の距離 $\mathcal{R}$ を拡げたときに変化するのはこの部分だからである．一方，垂直部分はあまり変化しないので，この部分はほかのクォークとは無関係で，もともとクォークがもつ質量をあらわしている．

ポテンシャルを計算するには，もう少し情報が必要である．まず，実際に計算するとストリングの下端 $r = r_m$ は

$$r_m \propto L^2/\mathcal{R} \tag{8.15}$$

となる（図 8.6）．また線素 (8.14) から 2 つの帰結が考えられる．第一に，水平方向の固有長さは $(r/L)\mathcal{R}$ なので，ストリングのエネルギーも

*2)　x 方向の線素には r^2 の因子がかかっているので，原点近くの方が固有長さ $r\Delta x$ は短くなる．

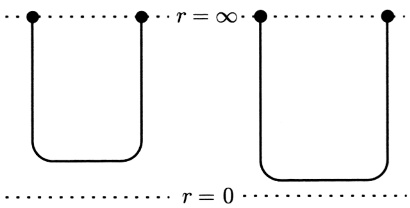


図 8.6 クォーク間の距離を変えたときのストリングの振るまい．$\mathcal{R}$ を大きくすると，ストリングの下端 r_m は $r_m \propto 1/\mathcal{R}$ のように下がってくる．

$$E_5 \propto \left(\frac{r}{L}\right)\mathcal{R} \tag{8.16}$$

となる．第二に，このエネルギー E_5 は 5 次元時空の立場でのエネルギーで，ゲージ理論の立場でのエネルギーではない．式 (8.14) にあるように，時間方向にも r^2 がかかっているからである．ゲージ理論の立場での時間はあくまで t なので，E_5 をゲージ理論のエネルギー $E_{ゲージ}$ に直す必要がある（6.3 節）．式 (8.14) から，5 次元での固有時間 τ_5 とゲージ理論の時間 t のあいだに $\tau_5 = (r/L)t$ の関係が成りたつので，エネルギーの関係はこの「逆」つまり

$$E_{ゲージ} = \left(\frac{r}{L}\right)E_5 \tag{8.17}$$

となる．そこで最終的にほしいポテンシャルは式 (8.15) も使って

$$E_{ゲージ} = \left(\frac{r_m}{L}\right)E_5 \propto \left(\frac{r_m}{L}\right)^2\mathcal{R} \tag{8.18}$$

$$\simeq O(L^2/\mathcal{R})\ . \tag{8.19}$$

このようにクーロン型のポテンシャルとなり*3)，閉じこめポテンシャル $E \propto \mathcal{R}$ にはならない．つまり，ストリングだからといって，ただちに閉じこめポテンシャルを意味するわけではなく，曲がった時空を使うことで非閉じこめポテンシャルを記述できることがわかる．**このようにして，5.1 節でとりあげたストリング模型の問題 2 が解決できる．**もっとも，その場合，逆に閉じこめポテンシャルはどうやって記述できるのか，という点が問題になる．この点について，次に議論する．

なお，AdS/CFT の辞書 (5.42) から，$L^2 \propto \lambda^{1/2}$ なので，ポテンシャル・エネルギーは $(g_{\rm YM}^2 N_c)^{1/2}$ に比例する．一方，摂動論的には，ポテンシャルは $g_{\rm YM}^2 N_c$ に比例する．これは AdS/CFT の結果がラージ N_c 極限であり，非摂動論的な効果をあらわしているからである*4)．

のちほど必要になるので，計量が式 (8.14) 以外の場合でのポテンシャルを求

---

*3) 本当のクーロン・ポテンシャルなら $E \simeq -1/\mathcal{R}$ となるはずだが，この方法では符号までは再現できない．これは，ストリングを粗っぽく図 8.5 のように近似したためである．

*4) ゼロ温度の $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の場合，場の理論の立場でもポテンシャルを非摂動論的に評価することができて，強結合で $\lambda^{1/2}$ と振るまうことが確かめられている [20], [21]．

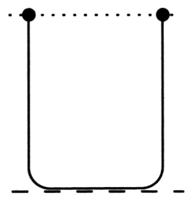


図 8.7 切りとられた AdS 時空の場合，クォーク間の距離が大きくなるとストリングは空間の端 $r = r_c$ に到達してしまう．

めておく．これまでの議論を一般の場合でくり返すことで，エネルギーは

$$\boxed{E_{\text{ゲージ}} = \sqrt{-g_{00}}|_{r_m} E_5 \propto \sqrt{-g_{00}g_{xx}}|_{r_m} \mathcal{R}} \tag{8.20}$$

となることがわかる．ただし計量には，ストリングが水平に伸びた場所でのものを使う．

閉じこめ相

一方，AdS/CFT は，昔の超弦理論が定性的に記述した閉じこめポテンシャルを記述することもできる．単純な AdS 時空は QCD ではなく，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論に対応する．$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論は，スケール不変で温度ゼロでも閉じこめ相は存在しない．さきほどの計算ではクーロン・ポテンシャルしか出てこないのはこのせいである．QCD に近い理論を記述するには，単純な AdS 時空を修正する必要がある．

ゲージ理論が変われば，どのような曲がった時空が必要なのかについてはいろいろな場合で知られているが，ここでは議論を単純化するために簡単なモデルを使う（図 8.7）．このモデルは，$r = \infty$ から $r = 0$ まで拡がった AdS 時空を $r = \infty$ から $r = r_c$ までで切りとったものである．AdS/CFT では，r 座標はゲージ理論のエネルギースケールという解釈をもっていた．閉じこめが，ある低エネルギースケール Λ で起こるということは，もとの AdS 時空の内部 $r \propto \Lambda$ で，時空に大きな変更が加わるということである．AdS 時空を切りとったモデルは，この効果を近似的にあらわしたものである*5)．

時空をいじったとは言え，ストリングが空間の端 r_c から十分離れている場合は，影響はない．AdS 時空と同じでクーロン・ポテンシャルが出てくる．しかし，クォーク間の距離 $\mathcal{R}$ が大きくなると新しい効果が生まれる．

さきほど，AdS 時空ではストリングの下端は $r_m \propto 1/\mathcal{R}$ となった．しかし，この切りとられた AdS 時空の場合，$\mathcal{R}$ が十分長くなると，ストリングは $r = r_c$ に達してしまいそれより先には行けない．したがって，水平に伸びたストリン

*5) より正確な時空として，Klebanov–Strassler 時空や，Polchinski–Strassler 時空などが知られている [22], [23]．

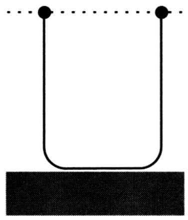


図 8.8 プラズマ相の場合．$r=0$ から $r=r_0$ の部分はブラックホールをあらわす．

グのエネルギーは式 (8.20) から

$$E_{ゲージ} \propto r_c^2 \mathcal{R} \simeq O(\mathcal{R}) \tag{8.21}$$

となり，たしかに閉じこめポテンシャルが出てくる．

結局，ポテンシャル・エネルギーに寄与するのは，空間の端 $r=r_c$ 部分だけなので，**実質的に昔のストリング模型でのポテンシャル描像と同じになる**．このように，AdS/CFT は昔のストリング模型の利点を生かしながら，その欠点を補うことができる．

プラズマ相

次に有限温度，つまりプラズマ相に移ってみる．AdS/CFT によると，有限温度のゲージ理論に相当するのは単純な AdS 時空ではなく，AdS ブラックホールである（図 8.8）．

有限温度の場合は，$r=r_0$ にブラックホールのホライズンがある．もっとも，この場合もブラックホールから十分離れていれば近似的に AdS 時空なので，ポテンシャルはクーロン型になる．しかし，ストリングがホライズンに到達すると新しい効果が生まれる．

ブラックホールの場合，時間方向の線素がホライズン近傍で特徴的な振るまいをする．このため，E_5 と $E_{ゲージ}$ の関係 (8.17) が修正される．シュワルツシルド AdS ブラックホールの場合，時間方向の線素は

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{L}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right\} dt^2 + \cdots \tag{8.22}$$

であり，ホライズン $r=r_0$ で g_{00} がゼロになる．このため，式 (8.20) から

$$E_{ゲージ} \simeq 0 \tag{8.23}$$

となる．水平方向のストリングはエネルギーには寄与しないということであるが，このことはクォーク間に力が働かないことを意味する．結局，クォークを十分離してしまうと，クォーク間に力が働かないことになる．これが AdS/CFT によるデバイ遮蔽である．

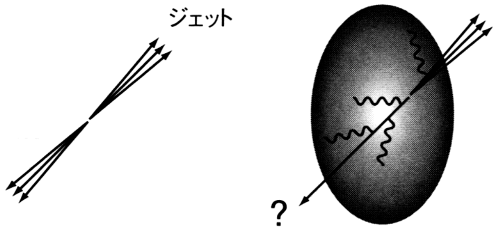


図 8.9　ジェットの抑制．左が核子衝突の場合で，右が重イオン衝突の場合．

クォーク・ポテンシャルの再来

ここで説明したポテンシャルの議論は，1998 年に AdS/CFT が本格的に唱えられてから 2 週間もしないうちに提案され，1 カ月もたたないうちにさまざまな拡張も試みられた．ところが，それから 8 年もたった 2006 年になって，このような単純な議論に再度スポットがあてられた．

もっとも，なにか本質的な部分で変更があったわけではない．1998 年当時，このような計算は AdS/CFT の証拠の一つとしてなされており，実際の応用を念頭に置いたものではなかった．超対称ゲージ理論は現実の QCD とは違うので，そのような計算を応用するにあたって心理的な抵抗もあったのだろう．しかし，RHIC 実験などで観測される状況に応じて，さまざまな効果を真剣に計算してみようという試みが，最近では果敢におこなわれている．

4.1.2 節でふれたように，プラズマ相でも摂動論的 QCD はあまり有効な手法ではない．このため，まずプラズマ相に特有の現象はなにかが議論の焦点の一つになってきた．現在までに議論されている現象としては

1. 小さな「ずり粘性」(4, 11 章)
2. ジェットの抑制（ジェット・クエンチング）
3. J/Ψ 抑制

などがある．

たとえばジェットの抑制（図 8.9）だが，ハドロンの散乱ではしばしば「ジェット」が生成される．ジェットはほぼ同じ方向に生成された多数のハドロンである．ジェットがプラズマ中にできるとジェットのエネルギーが媒質に吸収され，ハドロンの観測数が抑制される．これが**ジェットの抑制**である．

もう一つの **J/Ψ 抑制**[24] であるが，J/Ψ は $c\bar{c}$ からなる「チャーモニウム」の一種である．チャームは重いため (≈ 4.2 GeV)，チャームの対生成は，重イオン衝突の初期にしか起こらない．しかし，プラズマ中でこの生成が起こると，プラズマ中の軽いクォークやグルーオンによるデバイ遮蔽のため，$c\bar{c}$ 間の力は弱められる．そして，$c\bar{c}$ どうしで結合するよりも，むしろプラズマ中のほかの粒子と結合しやすくなる．結果として，チャーモニウムの生成は抑制される．

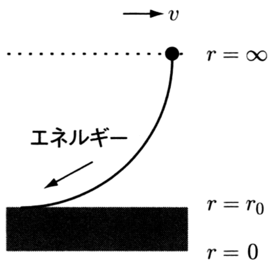


図 8.10　AdS/CFT によるジェットの抑制.

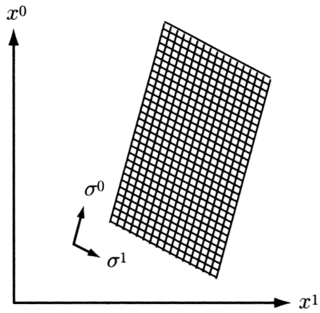


図 8.11　ストリングは時空中で世界面を掃く.

これらの現象も AdS/CFT の枠内で議論されている．たとえば，ジェットの抑制をみてみよう．これまではポテンシャルを考えるために，静的なクォークを考えてきた．しかし，この効果の場合，クォークがどうエネルギーを失っていくのかに興味がある．したがって，今度はクォークをあらわすストリングを x 方向に速度 v で動かすことにする（図 8.10）．すると，ストリングは図のようにたなびく．ストリングがたなびくのは，ブラックホールにエネルギーが渡されるためである．したがって，ストリングが失ったエネルギーをクォークがプラズマ中で失うエネルギーだと解釈することができる．

この提案は 4 つのグループから独立にされ，1 週間のうちにあいついで論文が出た [25]~[28]．また，その週のうちからこれらの提案を拡張する試みもなされ，大いに盛りあがったようである．

8.3　ストリングの作用

前節の直観的な議論を裏づけるために，まずストリングの作用を議論する．ストリングの作用は，2.1 節の粒子の作用と同様の議論から得られる．粒子は時空中で世界線を掃く．同様に，ストリングは時空中で 2 次元面，世界面を掃く（図 8.11）．粒子の場合，作用を世界線の長さで書いたように，ストリングの場合は作用を世界面の面積 A で書くのが自然であろう：

$$\mathcal{S} = -T_{\text{string}} \int dA \ . \tag{8.24}$$

T_{string} は作用を無次元にするためのパラメータで，(長さ)$^{-2}$ の次元をもつ．物理的には，これはストリングの張力を決めるパラメータである．長さの次元をもつパラメータ l_s を導入して，

$$T_{\text{string}} = \frac{1}{2\pi l_s^2} \tag{8.25}$$

とするのが便利である．l_s はストリングの典型的な長さをあらわす（ストリング長さ）．

粒子の場合と同様，世界面上に座標 $\sigma^a = (\sigma^0, \sigma^1)$ を導入する．世界面は $x^M(\sigma^a)$ としてあらわされる．σ^a を使うと計量は，

$$ds^2 = \eta_{MN} dx^M dx^N = \eta_{MN} \frac{\partial x^M}{\partial \sigma^a} \frac{\partial x^N}{\partial \sigma^b} d\sigma^a d\sigma^b \tag{8.26}$$

$$=: h_{ab}\, d\sigma^a d\sigma^b \tag{8.27}$$

となる．h_{ab} を**誘導計量** (induced metric) と呼ぶ．ここでやっていることは，基本的には 6 章でやった曲面の高次元時空への埋めこみと同じである．たとえば，S^2 の座標を $\sigma^a = (\theta, \varphi)$ ととり，$\mathbb{R}^3$ に埋め込むと，

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{8.28}$$

なので，誘導計量は

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

となる．

世界面の座標を使うと，面積要素は

$$dA = d^2\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} \tag{8.30}$$

で与えられる．S^2 の例では $dA = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ となり，S^2 のよく知られた面積要素が出る．また，σ^a は世界面上をラベルするパラメータ付けにすぎないので，面積要素は

$$\sigma^{a'} = \sigma^{a'}(\sigma^b) \tag{8.31}$$

という変換の下で不変である．これらの事情は一般相対論と同じである．一般相対論では体積要素を $d^dx\sqrt{-g}$ と書き，体積要素は一般座標変換の下で不変である．ただし，一般相対論の場合は，時空中での体積要素，時空中の一般座標変換を考えるのに対し，式 (8.30) は世界面上での面積要素であり，式 (8.31) は世界面上での一般座標変換という違いである．

式 (8.30) を使って得られた作用

$$\boxed{\mathcal{S}_{\rm NG} = -T_{\rm string} \int d^2\sigma \sqrt{-\det h_{ab}}} \tag{8.32}$$

を**南部–後藤作用**と言う．式 (8.26) より，誘導計量をあらわに書くと，

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} \dot{x}\cdot\dot{x} & \dot{x}\cdot x' \\ \dot{x}\cdot x' & x'\cdot x' \end{pmatrix} \quad (\dot{} := \partial_{\sigma^0},\ {}' := \partial_{\sigma^1})\ . \tag{8.33}$$

式 (8.29) と同様，これは (a, b) についての行列である．これを使って，南部–後藤作用は

$$\mathcal{S}_{\rm NG} = -T_{\rm string} \int d^2\sigma \sqrt{(\dot{x}\cdot x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} \tag{8.34}$$

となる．

ここでは埋め込まれる時空としては，ミンコフスキー時空を使った．しかし，2.1 節の粒子の場合同様，曲がった時空の場合は式 (8.26) で η_{MN} を $g_{MN}(x)$ に置きかればよい．

また，ブレーンの作用も同様の考察から得られる．たとえば Dp ブレーンの作用は，$(p+1)$ 次元面の誘導計量 h_{ab} を使い，

$$\mathcal{S}_{\rm D\mathit{p}} = -T_p \int d^{p+1}\sigma\, e^{-\phi} \sqrt{-\det h_{ab}} \tag{8.35}$$

で与えられる*6)．ストリング同様，このようなブレーンもプローブとして加えて議論することも可能である．

8.4 AdS/CFT でのウィルソン・ループ：具体計算

ここでは，AdS/CFT でのウィルソン・ループの直観的な理解（8.2 節）を，実際の計算で裏づける．例として，AdS_5 時空でのクォーク・ポテンシャルを計算する．

クォークのポテンシャル・エネルギーは，ストリングのエネルギーで与えられる．したがって，出発点は南部–後藤作用 (8.32) である．この作用は，世界面上の一般座標変換の下で不変なので，一般座標変換を使って，便利な世界面の座標 σ^0, σ^1 を選ぶことができる（ゲージ固定）．ここでは，以下の**静的ゲージ** (static gauge) と呼ばれるものをとる（図 8.12）*7)：

$$\sigma^0 = t\ , \quad \sigma^1 = r\ , \quad x = x(r)\ . \tag{8.36}$$

AdS_5 時空上での誘導計量は，

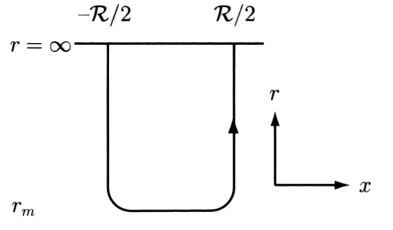


図 8.12　ウィルソン・ループを計算するための配位．

*6)　ディラトンの因子 $e^{-\phi}$ に注意．ディラトン ϕ とストリング結合定数 g_s は $g_s \simeq e^{\phi}$ の関係にあるので，この因子は D ブレーンの質量密度が $1/g_s$ に比例することに由来する（式 (5.29)）．

*7)　ストリングは r に対し転回点をもつので，このゲージは well-defined ではないが，対称性からクォーク・反クォーク対の片側だけを考えればいい．

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2(-dt^2 + d\boldsymbol{x}^2) + L^2\frac{dr^2}{r^2} \tag{8.37}$$

$$= -\left(\frac{r}{L}\right)^2 dt^2 + \left\{\left(\frac{L}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{L}\right)^2 x'^2\right\} dr^2 \quad (' := \partial_r)\ , \tag{8.38}$$

$$-\det h_{ab} = 1 + \left(\frac{r}{L}\right)^4 x'^2 \tag{8.39}$$

より

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2\pi l_s^2}\int d^2\sigma\sqrt{-\det h_{ab}} = -\frac{\mathcal{T}}{2\pi l_s^2}\int dr\sqrt{1+\left(\frac{r}{L}\right)^4 x'^2}\ . \tag{8.40}$$

$\mathcal{T}$ は時間間隔をあらわす．ラグランジアンは x を含まないため，x に共役な運動量 p_x は保存する：

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} \propto \frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 x'}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{L}\right)^4 x'^2}} = \text{定数}\ . \tag{8.41}$$

この定数を決める．いま，$r = r_m$ に転回点をもつ場合に興味がある．転回点では $\partial_r x|_{r=r_m} = \infty$ なので，定数は

$$\left.\frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 x'}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{L}\right)^4 x'^2}}\right|_{r=r_m} = \left(\frac{r_m}{L}\right)^2 \tag{8.42}$$

と決まる．式 (8.41) と式 (8.42) より，x' について解くと，

$$x'^2 = \left(\frac{L}{r}\right)^4 \frac{1}{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}\ . \tag{8.43}$$

式 (8.43) を解けば，ストリングの配位 $x(r)$ が決定できる．$r = r_m$ で $x = 0$ なので，$x(r)$ は

$$\int_0^x dx = \int_{r_m}^r \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}}\ . \tag{8.44}$$

とくに，$r \to \infty$ で $x = \mathcal{R}/2$ なので，

$$\frac{\mathcal{R}}{2} = \frac{L^2}{r_m}\int_1^\infty \frac{dy}{y^2\sqrt{y^4-1}} \quad (y := r/r_m) \tag{8.45}$$

$$= \frac{L^2}{r_m}\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(\frac{1}{4})^2}\ . \tag{8.46}$$

式 (8.46) から

$$r_m \simeq \frac{L^2}{\mathcal{R}} \tag{8.47}$$

なので，大きなループほど $r_m \to 0$ となり，式 (8.15) の振るまいが出る．また，$r \gg r_m$ のときは

$$\frac{\mathcal{R}}{2} - x = \frac{L^2}{r_m} \int_{r/r_m}^{\infty} \frac{dy}{y^2\sqrt{y^4-1}} \simeq r^{-3} \tag{8.48}$$

と振るまう．これは，大きな r でストリングは $x = \mathcal{R}/2$ に急速に接近することを意味し，図 8.5 の振るまいを裏づける．

式 (8.43) を式 (8.40) に代入して，

$$\mathcal{S} = -\frac{\mathcal{T}}{2\pi l_s^2} \int_{r_m}^{\infty} dr \frac{\left(\frac{r}{r_m}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}} \ . \tag{8.49}$$

したがって，ポテンシャル・エネルギーは

$$E = -\frac{2\mathcal{S}}{\mathcal{T}} = \frac{2}{2\pi l_s^2} r_m \int_1^{\infty} \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^4-1}} \ . \tag{8.50}$$

この積分は発散するが，これは単にクォークが無限に重いことを反映している．そこで，クォーク質量の分を差し引くことにする．ストリングが単純に伸びた場合 $x' = 0$ を式 (8.40) に代入して

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{\mathcal{T}}{2\pi l_s^2} \int_0^{\infty} dr \ , \tag{8.51}$$

$$E_0 = \frac{2}{2\pi l_s^2} r_m \int_0^{\infty} dy \ . \tag{8.52}$$

したがって，

$$E - E_0 = \frac{2}{2\pi l_s^2} r_m \left\{ \int_1^{\infty} dy \left(\frac{y^2 dy}{\sqrt{y^4-1}} - 1 \right) - 1 \right\} \ . \tag{8.53}$$

式 (8.47) より $r_m \simeq L^2/\mathcal{R}$ なので，クーロンの法則 $E \simeq 1/\mathcal{R}$ が出てくる．式 (8.53) の積分を評価すると，

$$E - E_0 = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^4} \frac{\lambda^{1/2}}{\mathcal{R}} \ . \tag{8.54}$$

これは直観的な説明 (8.19) の振るまいと一致する．

第 9 章
非平衡系への導入

これまで平衡系を議論してきたが，AdS/CFT を非平衡系に応用することを踏まえて，非平衡統計力学の初歩をまとめておく．微視的な理論である線形応答理論と，巨視的な理論である流体力学について説明する．

9.1 線形応答理論

9.1.1 アンサンブル平均と密度行列

統計力学ではアンサンブル平均を考える．オペレーターのアンサンブル平均は

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \sum_i w_i \langle \alpha_i | \mathcal{O} | \alpha_i \rangle \tag{9.1}$$

と定義される．$|\alpha_i\rangle$ は完全系をなす必要はないが，規格化されているものとする．w_i は統計的確率であり $\sum_i w_i = 1, w_i \geq 0$ を満たす．完全系 $|b'\rangle$ を使うと

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_{b',b''} \left(\sum_i w_i \langle b'' | \alpha_i \rangle \langle \alpha_i | b' \rangle \right) \langle b' | \mathcal{O} | b'' \rangle \tag{9.2}$$

となるので，**密度行列** (density matrix) ρ

$$\rho := \sum_i w_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i| \tag{9.3}$$

を導入すると，

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle &= \langle b'' | \rho | b' \rangle \langle b' | \mathcal{O} | b'' \rangle & (9.4) \\ &= \mathrm{tr}\, [\rho \mathcal{O}] & (9.5) \end{aligned}$$

と書きかえられる．$\sum_i w_i = 1$ は密度行列の言葉では $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ と書きかえられる．

例としてスピン 1/2 の系を考えよう：

$$S_z|\pm\rangle = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle\ . \tag{9.6}$$

この S_z の基底で，$|+\rangle$ だけを含む純粋アンサンブル[*1]は

$$\rho = |+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{9.7}$$

簡単に確かめられるように，純粋アンサンブルに対しては $\rho_{\text{pure}}^2 = \rho_{\text{pure}}$，$\text{tr}(\rho_{\text{pure}}^2) = 1$ が成りたつ．また，$|+\rangle$ と $|-\rangle$ を 50%ずつ含む混合アンサンブルは

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

となる．

シュレディンガー表示では，時間発展はブラケットに含まれる．時間発展のオペレーター $U(t, t_0)$ を使って，状態の時間発展を $|\alpha, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle$ と書くと，密度行列の時間発展は

$$\rho(t) = \sum_i w_i |\alpha_i, t\rangle\langle\alpha_i, t| = U(t, t_0)\rho(t_0)U^{-1}(t, t_0)\ . \tag{9.9}$$

9.1.2 線形応答理論

実験においては，しばしば外場 $\phi^{(0)}$ を加えて，（その外場と結合する）オペレーター $\mathcal{O}$ への**応答** $\delta\langle\mathcal{O}\rangle$ をみる．具体例としては，

	外場 $\phi^{(0)}$	応答 $\mathcal{O}$
磁性体：	磁場 H	磁化密度 m
誘電体：	ゲージ・ポテンシャル μ	電荷密度 ρ
伝導体：	ベクトル・ポテンシャル $A_i^{(0)}$	カレント J^i
流体力学：	時空のゆらぎ $h_{\mu\nu}^{(0)}$	エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$

などが挙げられる．**線形応答理論**は，このような応答を調べることを目的とする[*2]．線形応答という言葉の「線形」は，外場に対して線形のオーダーで考えるからである[*3]．

*1） 伝統的には，純粋アンサンブルは純粋状態 (pure state)，混合アンサンブルは混合状態 (mixed state) と呼ばれる．

*2） ここで，流体力学の場合は少しコメントが必要であろう．もちろん，実際の実験で時空を曲げることはできない．ここで時空のゆらぎをもち出したのは，流体力学も磁性体などと同じ土俵に載せて議論するためである．（その理由は 9.3.2 節で述べるが，あとの久保公式の導出に便利だからである）一般相対論によると，時空のゆらぎによってエネルギー運動量テンソルにゆらぎが生じるはずなので，このような外場と応答を考えることは，原理的に問題はない．

*3） 本書では線形非平衡だけを扱うが，統計力学でも AdS/CFT でも非線形な場合も興味深い．

オペレーターへの応答は，量子力学の時間依存する摂動の手法を使って求めることができる．ハミルトニアンが

$$H = H_0 + \delta H(t) \tag{9.10}$$

という形で与えられたとする．H_0 は外場がないときのハミルトニアンである．摂動ハミルトニアン δH あるいは摂動作用 $\delta\mathcal{S}$ を

$$\delta H(t) = -\int d^3x\, \phi^{(0)}(t, \boldsymbol{x})\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) \ , \tag{9.11}$$

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x\, \phi^{(0)}(t, \boldsymbol{x})\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) \ , \tag{9.12}$$

という形とする．また，$\phi^{(0)}(t < t_0, \boldsymbol{x}) = 0$ とする．

オペレーターのアンサンブル平均は，密度行列の時間発展 (9.9) を使って

$$\langle\mathcal{O}(t, \boldsymbol{x})\rangle = \mathrm{tr}\,[\rho(t)\mathcal{O}(\boldsymbol{x})] \tag{9.13}$$

$$= \mathrm{tr}\left[\rho(t_0)U^{-1}(t, t_0)\mathcal{O}(\boldsymbol{x})U(t, t_0)\right] \ . \tag{9.14}$$

2 行目は，時間発展がオペレーターに含まれるハイゼンベルグ表示に相当する．

しかし，ここでは相互作用表示を使う，つまりオペレーターの時間発展は外場がないときのハミルトニアン H_0 にしたがうものとする．H_0 による時間発展のオペレーターを U_0 と書くと，相互作用表示でのオペレーター $\mathcal{O}_I(t, t_0)$ は $\mathcal{O}_I = U_0^{-1}\mathcal{O}U_0$ である．シュレディンガー方程式より，時間発展のオペレーターは

$$i\partial_t U = HU \ , \tag{9.15}$$

$$i\partial_t U_0 = H_0 U_0 \ , \tag{9.16}$$

を満たすので

$$U(t, t_0) = U_0(t, t_0)U_1(t, t_0) \ , \tag{9.17}$$

$$i\partial_t U_1 = \delta H_I U_1 \ , \tag{9.18}$$

となる．$\delta H_I := U_0^{-1}\delta H U_0$ は**相互作用表示**での摂動ハミルトニアンである．$U_1(t, t_0)$ のシュレーディンガー方程式を解くと，

$$U_1(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt'\delta H_I(t') + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt'\int_{t_0}^{t'} dt''\delta H_I(t')\delta H_I(t'') + \cdots \tag{9.19}$$

$$=: T\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt'\delta H_I(t')\right] \ . \tag{9.20}$$

T は時間順序積をあらわす．相互作用表示を使うと，式 (9.14) は

$$\langle \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})\rangle = \mathrm{tr}\left[\rho(t_0)U_1^{-1}(t,t_0)\mathcal{O}_I(t,\boldsymbol{x})U_1(t,t_0)\right] \ . \tag{9.21}$$

外場 $\phi^{(0)}$ の 1 次のオーダーまでをとると，

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})\rangle &= \mathrm{tr}\left[\rho(t_0)\left(1+i\int_{t_0}^{t}dt'\delta H_I(t')+\cdots\right)\mathcal{O}_I(t,\boldsymbol{x})\right.\\ &\qquad\left.\times\left(1-i\int_{t_0}^{t}dt'\delta H_I(t')+\cdots\right)\right] \qquad (9.22)\\ &= \mathrm{tr}\left[\rho(t_0)\mathcal{O}_I(t,\boldsymbol{x})\right]\\ &\quad -i\,\mathrm{tr}\left[\rho(t_0)\int_{t_0}^{t}dt'[\mathcal{O}_I(t,\boldsymbol{x}),\delta H_I(t')]\right]+\cdots \ . \qquad (9.23)\end{aligned}$$

1 項目は外場を加える前の熱平衡値にほかならない．これを $\langle \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})\rangle_0$ と書くことにする．$t_0 \to -\infty$ とすると，

$$\begin{aligned}\delta\langle \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})\rangle &:= \langle \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})\rangle - \langle \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})\rangle_0 \qquad (9.24)\\ &= i\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\ \langle[\mathcal{O}(t,\boldsymbol{x}),\mathcal{O}(t',\boldsymbol{x}')]\rangle_0\,\phi^{(0)}(t',\boldsymbol{x}') \qquad (9.25)\\ &= i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x'\,\theta(t-t')\,\langle[\mathcal{O}(t,\boldsymbol{x}),\mathcal{O}(t',\boldsymbol{x}')]\rangle_0\,\phi^{(0)}(t',\boldsymbol{x}') \ . \qquad (9.26)\end{aligned}$$

$\theta(t-t')$ は階段関数である．こうして得られた式 (9.26) をみると，応答は熱平衡の密度行列 $\rho(t_0)$ についてのアンサンブル平均で計算でき，また $\mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})$ は H_0 にしたがって時間発展することがわかる．

遅延グリーン関数 $G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}$ を

$$G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') := -i\theta(t-t')\,\langle[\mathcal{O}(t,\boldsymbol{x}),\mathcal{O}(t',\boldsymbol{x}')]\rangle_0 \tag{9.27}$$

と定義すると，式 (9.26) は

$$\delta\langle \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}d^4x'\,G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\phi^{(0)}(t',\boldsymbol{x}') \tag{9.28}$$

となる[*4]．

また，$k_\mu=(\omega,\boldsymbol{k})$ とし，この式をフーリエ変換すると

$$\boxed{\delta\langle \mathcal{O}(k)\rangle = -\,G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(k)\phi^{(0)}(k)} \tag{9.29}$$

となる．$G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(k)$ は運動量空間での遅延グリーン関数である：

$$G_R^{\mathcal{O}\mathcal{O}}(k) = -i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\,e^{-ik\cdot x}\theta(t)\,\langle[\mathcal{O}(t,\boldsymbol{x}),\mathcal{O}(0,\boldsymbol{0})]\rangle_0 \ . \tag{9.30}$$

$(k\cdot x := k_\mu x^\mu)$．このグリーン関数 G_R を決めるのが AdS/CFT である．なお

*4） 摂動ハミルトニアン δH （あるいは作用の摂動項 $\delta\mathcal{S}$）の符号，遅延グリーン関数の符号 G^R は，文献によってはここと違う定義を使っているものがある．それにしたがって，線形応答関係式 (9.28), (9.29) にも符号の違いが生じることがあるので注意が必要である．

物性では，$\chi := -G_R$ を**応答関数**と呼ぶ*5)．

具体例をいくつか挙げておこう：

1. 流体力学の場合は，たとえば $\delta\mathcal{L} = h^{(0)}_{xy}(t)T^{xy}(x)$ に対して，

$$\delta\langle T^{xy}\rangle = -G_R^{xy,xy}h^{(0)}_{xy}\ , \tag{9.31}$$

$$G_R^{xy,xy} = -i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, e^{-ik\cdot x}\theta(t)\left\langle[T^{xy}(t,\boldsymbol{x}), T^{xy}(0,\boldsymbol{0})]\right\rangle_0\ . \tag{9.32}$$

2. 系に保存カレント J^μ が存在する場合：
   (a) たとえば誘電体では $\delta\mathcal{L} = A^{(0)}_0(t)J^0(x)$ に対し，

$$\delta\langle\rho\rangle = -G_R^{\rho\rho}\mu\ , \tag{9.33}$$

$$G_R^{\rho\rho} = -i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, e^{-ik\cdot x}\theta(t)\left\langle[\rho(t,\boldsymbol{x}), \rho(0,\boldsymbol{0})]\right\rangle_0\ . \tag{9.34}$$

   ここで，$\rho = J^0$ は電荷密度，$\mu = A^{(0)}_0$ は ρ に対するゲージ・ポテンシャルである．

   (b) また伝導体であれば，$\delta\mathcal{L} = A^{(0)}_x(t)J^x(x)$ に対し，

$$\delta\langle J^x\rangle = -G_R^{xx}A^{(0)}_x\ , \tag{9.35}$$

$$G_R^{xx} = -i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, e^{-ik\cdot x}\theta(t)\left\langle[J^x(t,\boldsymbol{x}), J^x(0,\boldsymbol{0})]\right\rangle_0\ . \tag{9.36}$$

9.1.3　輸送係数の例：伝導率

グリーン関数 G_R は**輸送係数**と関係づけることができる．簡単な例として，まず伝導率 σ についてみてみよう．

カレントについての線形応答関係式は，式 (9.35) だった：

$$\delta\langle J^x\rangle = -G_R^{xx}A^{(0)}_x\ .$$

$A^{(0)}_x$ はカレントに結合するベクトル・ポテンシャルである．そこで，外部電場を $E^{(0)}_x = -\partial_t A^{(0)}_x \overset{FT}{\to} i\omega A^{(0)}_x$ として導入すると（"$\overset{FT}{\to}$" はフーリエ変換したことをあらわす），

$$\delta\langle J^x\rangle = -\frac{G_R^{xx}}{i\omega}E^{(0)}_x \tag{9.37}$$

と書きかえることができる．これはオームの法則 $\delta\langle J^x\rangle = \sigma E^{(0)}_x$ にほかならない．したがって，

$$\sigma(\omega) = -\frac{G_R^{xx}(\omega, \boldsymbol{k}=0)}{i\omega}\ . \tag{9.38}$$

このような関係式を**久保公式**と言う．

次に流体力学を考え，$G_R^{xy,xy}$ と粘性を関係づけるが，流体力学を説明しつつ議論を進めることにする．

---

*5)　グリーン関数と応答関数には，伝統的に符号の分の違いがある．

9.2 熱力学のおさらい

以下では簡単に熱力学のフォーマリズムを復習しておく．詳細はたとえば文献 [29], [30] をみよ．

- 熱力学の基本要請：
  - ○ 要請 1：平衡状態は，**示量変数**（エネルギー E, 体積 V, 粒子数 N）によって完全に記述される*6)．すなわち，系の熱力学的独立変数は，これら示量変数である．
  - ○ 要請 2：平衡状態では，エントロピー S が存在する．エントロピーは部分系について加法的，連続で微分可能なエネルギーの単調増加関数である．複合系の平衡状態は，エントロピー最大の状態で与えられる．つまり，部分系それぞれのエントロピーの和が最大になる状態である．
- 基本関係式：基本要請より，エントロピーは示量変数の関数であり

$$S = S(E, V, N) \ . \tag{9.39}$$

この式を**基本関係式** (fundamental relation) と言う．エントロピーが加法的であることは，基本関係式が示量変数の 1 次同次関数であることを示す：

$$S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(E, V, N) \ . \tag{9.40}$$

単調性より

$$\left.\frac{\partial S}{\partial E}\right|_{V,N} > 0 \ . \tag{9.41}$$

連続で微分可能性と単調性から，基本関係式は

$$E = E(S, V, N) \tag{9.42}$$

と書きかえることも可能である．式 (9.39) をエントロピー表示，式 (9.42) をエネルギー表示と言う．一般に,「表示」は独立変数の組を指定する．エントロピー表示は，独立変数の組 (E, V, N) を指定している．以下ではエネルギー表示を使う．

基本関係式は系についてのあらゆる熱力学的情報をもち，基本関係式から以下で議論する熱力学的な関係式がすべて導かれる．

基本関係式の一例として，たとえば光子気体の場合

$$E(S, V) = \frac{3}{4} c^{1/3} S^{4/3} V^{-1/3} \ , \quad c = \frac{45}{4\pi^2} \tag{9.43}$$

となる*7)．この式はたしかに示量変数について 1 次の同次関数になっている．

---

*6) 以下，簡単のために 1 成分系のみを考える．

*7) 統計力学的には，この式は 7.2.2 節の結果から導出できる．光子は 2 自由度をもつことに注意して，ε_{B} を s_{B} で書きかえればよい．

- **示強変数**：温度 T，圧力 P,「化学ポテンシャル」[*8] μ は，基本関係式 (9.42) の偏微分係数として定義される：

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = T(S, V, N) \ , \tag{9.44a}$$

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} = P(S, V, N) \ , \tag{9.44b}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} = \mu(S, V, N) \ . \tag{9.44c}$$

基本関係式が示量変数の 1 次同次関数であることから，示強変数は 0 次同次関数である．これら示強変数を示量変数であらわした式を**状態方程式**と言う．式 (9.41) から $T > 0$ の条件が出る．

- **熱力学第 1 法則**：基本関係式と示強変数の定義から

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \ . \tag{9.45}$$

- **オイラーの関係式**：基本関係式が 1 次同次関数であることから

$$E = TS - PV + \mu N \ . \tag{9.46}$$

示強変数を含むため，オイラーの関係式は基本関係式ではないことに注意．

- **ギブス–デュエム関係式**：示強変数間の関係式．オイラーの関係式と第 1 法則から

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0 \ . \tag{9.47}$$

- **熱力学ポテンシャル**：これまで表示として，示量変数 (E, V, N)，あるいは (S, V, N) を使ったが，実際の応用などでは温度 T を一定にするなど，一部の示強変数を独立変数としてあつかうのが便利である．この目的のために，基本関係式をルジャンドル変換した熱力学ポテンシャルを使う．独立変数の値を与えたとき，熱力学ポテンシャル最小の状態が平衡状態である．熱力学ポテンシャルも系についてのあらゆる熱力学的情報をもつ[*9]．

熱力学ポテンシャルとしては，たとえば**自由エネルギー** $F = F(T, V, N)$ がある：

$$F(T, V, N) := E - TS \ , \tag{9.48}$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \ , \tag{9.49}$$

---

*8) 熱力学は伝統的にさまざまな化学成分を含んだ系に適用されたため，μ は「化学ポテンシャル」と呼ばれるが，μ は化学物質に限定されるものではない．たとえば，荷電粒子に対してのゲージ・ポテンシャルや，化学成分ではない粒子数（バリオン数など）に共役なポテンシャルに対しても同じ用語を使うことにする．いずれにせよ，μ は物質の流入に対するポテンシャル・エネルギーである．

*9) その意味では，熱力学ポテンシャルもある表示における基本関係式と呼ぶべきである．

より

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} . \tag{9.50}$$

たとえば光子気体の場合，まず基本関係式 (9.43) から温度は $T(S,V) = \partial E/\partial S = (cS/V)^{1/3}$ である．これを S について解くと，$S(T,V) = T^3V/c$．したがって，自由エネルギーは

$$F = E - TS = -\frac{1}{4}c^{1/3}S^{4/3}V^{-1/3} = -\frac{1}{4c}T^4V . \tag{9.51}$$

またグランドカノニカル・ポテンシャル $\Omega = \Omega(T,V,\mu)$ は

$$\Omega(T,V,\mu) := E - TS - \mu N \tag{9.52}$$

$$= -P(T,\mu)V . \tag{9.53}$$

ここでオイラーの関係式を使った．

$$d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu \tag{9.54}$$

より

$$S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} , \quad N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} . \tag{9.55}$$

熱力学的ポテンシャルは統計力学の分配関数 Z と関係する．たとえば

$$Z = e^{-\beta\Omega} . \tag{9.56}$$

- 空間的に一様な系の場合，エネルギー密度 $\varepsilon := E/V$，エントロピー密度 $s := S/V$，数密度 $n := N/V$ 等を使うのが便利である．この場合，たとえば第 1 法則は

$$d\varepsilon = Tds + \mu dn . \tag{9.57}$$

9.3 流体力学

9.3.1 流体力学のあらまし

遅延グリーン関数が，系の応答をあらわすことをみたが，実際にグリーン関数を評価するのは一般に困難である．AdS/CFT はこのグリーン関数を決めることができる．一方で，保存則や低エネルギー有効理論といった手法を使うことで，我々が必要とする情報をグリーン関数からもう少し絞りこむことができる．この手法を**流体力学**と言う*10)．

流体力学は，系の巨視的振るまいを記述する．主たる興味は保存量で，なぜ

*10) 流体力学の教科書は，古いとは言えやはりランダウ–リフシッツが良い [31]．

なら保存量は低エネルギー $\omega \to 0$，長波長 $q \to 0$ で生き残ることが保証されている巨視的変数だからである．たとえば以下の拡散問題では，カレントの保存則は

$$\partial_0 \rho + \partial_i J^i = 0 \tag{9.58}$$

という形をとるが，フーリエ変換をすればわかるように（式 (9.66)），この保存則は $q \to 0$ とともに $\omega \to 0$ となるモードがあることを示す．

保存量のほかに考慮に入れるべき巨視的変数としては，

- 南部–ゴールドストンモード：連続的対称性の破れがある場合
- 秩序変数：相転移がある場合

などがあげられる．**流体力学は，任意の系におけるこれらの変数についての力学である**．とくに，字句通りの流体に限定されないことに注意しよう．例としては，物性におけるスピン系があげられる．

場の理論的には，流体力学は**有効理論** (effective theory) である．有効理論のパラメータは微視的理論の詳細によるため，有効理論の枠内では決まらない．流体力学の場合，これらのパラメータは**輸送係数**と呼ばれる．AdS/CFT は，微視的理論の計算を重力理論を用いておこなえるため，これらの輸送係数を決定できる．

9.3.2 例：拡散問題

流体力学，とくに粘性流体の問題は複雑なので，まずカレント J^μ の拡散の例を考えることにしよう．拡散で出会ういろいろな問題は，流体力学に対しても共通する．

ここでは，カレントを具体的には特定しない：

- 物性的な応用では，通常の電磁気学的なカレントかもしれないが，それに限定されるわけではない．
- たとえば，QCD ではバリオン数保存則に伴う $U(1)_B$ カレントが存在する．
- また，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の場合，R 対称性に伴う R カレントが存在する．

いずれにせよ，$\rho := J^0$ はこの $U(1)$ の下での「粒子数」密度，あるいは「電荷」密度とでも呼ぶべきものである．

拡散の問題の場合に，変数と保存則を考えると

$$\text{変数：} \quad J^\mu = (\rho, J^i) \ , \tag{9.59}$$

$$\text{保存則：} \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \ . \tag{9.60}$$

$(3+1)$ 次元で，変数は 4 個，一方保存則は 1 個の関係式を与えるだけなので，これでは方程式が閉じない．方程式を閉じるために，現象論的に導入される式を**構成方程式** (constitutive equation) と言う．拡散の場合は，これはフィック

の法則 (Fick's law) として知られている：

$$J^i = -D\partial^i \rho \ . \tag{9.61}$$

フィックの法則は，電荷勾配によってカレントが生じることを意味している．これは物理的にも自然である．比例係数 D を**拡散係数** (diffusion constant) と呼ぶ．保存則とフィックの法則を組み合わせると，ρ と J_i が decouple し，ρ だけの方程式が得られる：

$$0 = \partial_\mu J^\mu = \partial_0 \rho + \partial_i J^i = \partial_0 \rho - D\partial_i^2 \rho \ . \tag{9.62}$$

これが**拡散方程式** (diffusion equation) である．

(1+1) 次元の拡散方程式を解いてみよう．初期条件として，$\rho(t=0,x) = \delta(x)$ とする．フーリエ–ラプラス変換

$$\rho(t,q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-iqx} \rho(t,x) \ , \tag{9.63}$$

$$\tilde{\rho}(\omega,q) = \int_0^{\infty} dt \, e^{i\omega t} \rho(t,q) \ , \tag{9.64}$$

を使うと式 (9.62) は容易に解け，

$$\tilde{\rho}(\omega,q) = \frac{1}{-i\omega + Dq^2} \rho(t=0,q) = \frac{1}{-i\omega + Dq^2} \ . \tag{9.65}$$

すなわち $\tilde{\rho}(\omega,q)$ は複素 ω 平面の虚軸上，

$$\boxed{\omega = -iDq^2} \tag{9.66}$$

にポールをもつ．このような分散関係は，今後しばしば登場する．

t について逆変換すると，このポールによって $\rho(t,q)$ が $e^{-Dq^2 t}$ と指数的に減少することがわかる．したがって，拡散のタイムスケール，**緩和時間** (relaxation time) は $\tau \simeq 1/(Dq^2)$ である．x についても逆変換を施すと，

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt} \right) \quad (t \geq 0) \ . \tag{9.67}$$

この解は，当初デルタ関数的であった電荷分布が時間とともに拡散する様子をあらわしている（図 9.1）．

構成方程式 (9.61) は物理的にも自然だが，一般には熱力学第 2 法則を満たすよう決定される．簡単な例として，拡散問題でも熱拡散の場合をみてみよう．この場合，保存則と熱力学第 1 法則は，

$$\partial_0 \varepsilon + \partial_i q^i = 0 \ , \tag{9.68}$$

$$d\varepsilon = T ds \ . \tag{9.69}$$

(q^i : 熱流）これらを組みあわせると，

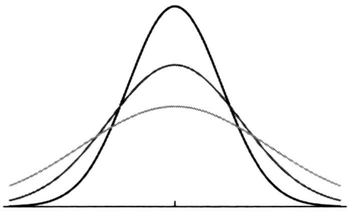


図 9.1　電荷の拡散.

$$0 = \partial_0 s + \frac{1}{T}\partial_i q^i \tag{9.70}$$

$$= \partial_0 s + \partial_i \left(\frac{1}{T} q^i\right) + \frac{\partial_i T}{T^2} q^i \ . \tag{9.71}$$

したがって，エントロピーの時間発展は表面積分を落として，

$$\partial_0 S = \int d^3x \, \partial_0 s = -\int d^3x \, \frac{\partial_i T}{T^2} q^i \tag{9.72}$$

となり，

$$q^i = -\kappa \, \partial^i T \tag{9.73}$$

と要請すると，第 2 法則を満たすことがわかる（ただし $\kappa > 0$）：

$$\partial_0 S = \kappa \int d^3x \left(\frac{\partial_i T}{T}\right)^2 > 0 \ . \tag{9.74}$$

式 (9.73) はフィックの法則と同じ形だが，熱伝導の場合フーリエの法則と呼ばれる．κ は**熱伝導率**で，これも輸送係数の一つである．

すでにみたように，微視的な立場では輸送係数は線形応答理論から求められるが，拡散係数の場合は少し工夫が必要である．線形応答のこれまでの議論では，外場 ϕ_0 により応答 $\delta\mathcal{O}$ が生じた場合だった：

$$\text{外場 } \phi_0 \to \text{応答 } \delta\mathcal{O} \tag{9.75}$$

一方，拡散の場合は，荷電勾配によって応答 $\delta\mathcal{O}$ が生じる場合である．すなわち，

$$\text{熱力学的な内力} \to \text{応答 } \delta\mathcal{O} \tag{9.76}$$

このような熱力学的な内力による応答の場合（温度勾配や速度勾配の場合も同じタイプである）に，線形応答をどう適用すればいいのだろう？　これらの場合の問題点は，直接ハミルトニアンの摂動項としては書けない点である．

この場合は 2 つのステップに分けて考える．外場の非一様性が ρ の非一様性を生み，それによってカレントが流れると考えれば，これまでの線形応答理論が使える．つまり，電荷 ρ に対する化学ポテンシャル μ の非一様性を外場として与え，そこから電荷の非一様性，電荷勾配を作る：

$$J^i = -D\partial^i\rho = -D\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)\partial^i\mu \ . \tag{9.77}$$

$\chi := \partial\rho/\partial\mu$ は静的感受率，$E^i := -\partial^i\mu$ はカレントに対する「電場」であることに注意すると，

$$J^i = (D\chi)E^i \ . \tag{9.78}$$

しかし，これはオームの法則 $J^i = \sigma E^i$（σ : 伝導率）にほかならない．したがって，拡散係数，静的感受率，伝導率のあいだには簡単な関係が成立することになる：

$$\sigma = D\chi \ . \tag{9.79}$$

9.1.3 節でみたように，σ については久保公式があるので，式 (9.79) を使って D を求めることができる：

$$D = -\frac{1}{\chi}\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\, G_R^{xx}(\omega, \boldsymbol{k}=0) \ . \tag{9.80}$$

D を求めるもう一つの方法がある．ρ についての線形応答関係式は

$$\delta\langle\rho\rangle = -G_R^{\rho\rho}\mu \tag{9.81}$$

だったが，ρ は $\omega = -iDq^2$ にポールをもつので，$G_R^{\rho\rho}$ のポールからも D が求まる．式 (9.80) とは使うグリーン関数が違うことに注意．また，グリーン関数の値そのものに着目するのか，それともポールに着目するのかという点が違うことにも注意．

ここまでの議論をまとめると，

- 流体力学では，保存則と構成方程式で閉じた記述を作る．
- 構成方程式は現象論的に導入される式で，一般に熱力学の第 2 法則を満たすように決める．この構成方程式によって，輸送係数が導入される．
- 局所熱平衡：いま考えている状況は非平衡ではあるものの，平衡に近い．つまり，考えているスケールより小さいスケールで熱力学的平衡が成りたち，時間・場所に依存した熱力学量が意味をなすと考えている．たとえば，温度は本来平衡系で定義されたもので系にわたって一定だったが，熱拡散の議論では $T(t,x)$ を考えた．
- 応答を知るために，線形応答理論によって遅延グリーン関数 G_R，そして流体力学によって輸送係数まで必要な情報を絞り込んできた．AdS/CFT は，この輸送係数を微視的な立場から決めることができる．もっとも，AdS/CFT 自体は，ここで仮定しているような流体力学のフォーマリズムを仮定する必要はない．すなわち，流体力学のフォーマリズムのクロスチェックとしても用いることができる（たとえば 11.3.2 節を参照）．
- 輸送係数の求め方には 2 種類ある：

○ G_R^{xx} の $O(\omega)$ の係数から求める方法（久保公式）.

○ $G_R^{\rho\rho}$ のポールと分散関係から求める方法.

拡散問題については，まだ言い尽くしていない点もあるので，11.3.2 節であらためて議論する.

9.3.3 完全流体

まず，流体のもっとも簡単な場合として，巨視的な変数として $T^{\mu\nu}$ だけの場合を考える.

$$\text{変数：}\quad T^{\mu\nu}\ , \tag{9.82}$$

$$\text{保存則：}\quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\ . \tag{9.83}$$

$T^{\mu\nu}$ は 2 階の対称テンソルなので，$(3+1)$ 次元で自由度は 10 個，一方保存則は 4 個であり，拡散問題と同様，方程式は閉じない．そこで $T^{\mu\nu}$ の変数として，

エネルギー密度 $\varepsilon(x)$，流体の 4 元速度場 $u^\mu(x)$

を選ぶ．速度場は，時間・空間の各点で流体の速度を指定する．ε（1 つ）と u^μ（3 つ）で，望みどおり 4 個の変数がある.（$u^2 = -1$ の関係より u^μ の独立な変数は 3 個である.）

以下では，$T^{\mu\nu}$ の形を変数の微分展開で決めていく．微分展開の 0 次に相当するのが，**完全流体** (perfect fluid) である．このオーダーで対称テンソルを作ることができる組み合わせは，$u^\mu u^\nu$ と $\eta^{\mu\nu}$ しかない．このことから，$T^{\mu\nu}$ の形として，

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu}\ . \tag{9.84}$$

これが完全流体の構成方程式である．ここで圧力 P を導入したが，9.2 節でみたように P は独立変数ではないことに注意．$u^\mu \overset{RF}{=} (1,0,0,0)$ となる（局所）**流体静止系**では（“$\overset{RF}{=}$” は流体静止系でのみ成立する式をあらわす），

$$T^{\mu\nu} \overset{RF}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}\ . \tag{9.85}$$

$T^{\mu\nu}$ 各成分の物理的意味をみてみよう：

- $T^{00} \overset{RF}{=} \varepsilon$ なので，ε は流体静止系でのエネルギー密度をあらわす*11).
- T^{0i} は運動量密度をあらわす．したがって，流体静止系では 0 になる．$T^{0i} = (\varepsilon + P)u^0 u^i$ なので，相対論的流体では運動量密度はエネルギー

*11) 流体力学では，すべてのスカラー量は流体静止系で定義される.

密度のみならず，圧力も寄与することに注意[*12]．

- T^{ij} は，i 方向への j 運動量流束をあらわす．完全流体では $T^{ij}=P\delta^{ij}$ なので，この場合，力はすべての方向で等しく（等方性），力が面に垂直にかかることを意味する[*13]．力が垂直にかかることは，ずり粘性がある場合は成りたたず，力は面に水平方向にも加わる．等方性は，u^μ と $\eta^{\mu\nu}$ のみから $T^{\mu\nu}$ を構成したためである．非等方の場合，空間的に特別な方向を指定する新たなベクトル，たとえば V^μ が存在する．このベクトルを使えば，式 (9.84) にはない対称テンソルの項をつけ加えることができる．

拡散問題同様，構成方程式を用いて閉じた方程式系を書き下してみると，式 (9.83) の各成分は，流体力学の方程式系と

$$\begin{aligned}&\partial_\mu T^{\mu 0}=0 \to \text{連続の式}\ ,\\ &\partial_\mu T^{\mu i}=0 \to \text{オイラーの式}\ ,\end{aligned} \tag{9.86}$$

と対応する．まず，式 (9.83) を u_ν で縮約をとる．これは，静止系では式 (9.83) の 0 成分に相当する：

$$u_\nu\partial_\mu\left\{(\varepsilon+P)u^\mu u^\nu+P\eta^{\mu\nu}\right\}=0\ . \tag{9.87}$$

$u^2=-1$ と規格化されているので，

$$0=\partial_\mu u^2=2u_\nu\partial_\mu u^\nu\ . \tag{9.88}$$

これに注意すると，式 (9.87) から

$$0=u^\mu\partial_\mu\varepsilon+(\varepsilon+P)\partial_\mu u^\mu \tag{9.89}$$

$$=\frac{d\varepsilon}{d\tau}+(\varepsilon+P)\partial_\mu u^\mu\ . \tag{9.90}$$

ここで $d/d\tau:=u^\mu\partial_\mu$．これは相対論的な**連続の式**である（後述）．

また，式 (9.83) の i 成分は，

$$\partial_0 T^{0i}+\partial_j T^{ji}=0 \tag{9.91}$$

だが，T^{0i} は運動量密度であり，T^{ji} は隣りあった流体要素間の力をあらわすので，これはニュートンの第 2 法則にほかならない．T^{ji} は流体要素 A が隣の流体要素 B に及ぼす力だが，B には反対側の要素からも逆向きの力が働いて

---

*12) 相対論的に $(\varepsilon+P)$ の組み合わせで登場する点は，さまざまな現象で決定的な働きをする．星が重力崩壊してブラックホールになるのも，この効果である．星が安定に存在するには，重力に対抗する圧力が必要である．しかし，十分に重い星では，核反応を終えると，どんな圧力をもってしてももはや星を支えることができなくなってしまう．一般相対論では $T^{\mu\nu}$ 全体が重力場のソースとなり，圧力を大きくすることはますますソースを増やすという自滅的な結果になってしまうからである．この結果，ブラックホールが誕生する．

*13) これをパスカルの法則と言う．

いる．したがって，加速度が生じるのは T^{ji} が場所ごとに異なっている場合であり，このため式 (9.91) には T^{ji} の微分で入っている．$\partial_\mu T^{\mu i}=0$ を評価すると，

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \left\{(\varepsilon+P)u^\mu u^i + P\eta^{\mu i}\right\} && (9.92)\\
&\overset{RF}{=} (\varepsilon+P)u^\mu \partial_\mu u^i + \partial^i P\ . && (9.93)
\end{aligned}
$$

微分が u^i にかからないと，流体静止系では消えてしまうことに注意（流体静止系では u の微分はゼロではない）．一般の系では，

$$
(\varepsilon+P)\frac{du^i}{d\tau} + u^i\frac{dP}{d\tau} + \partial^i P = 0\ . \tag{9.94}
$$

これらは**オイラーの式**の相対論版に相当する（後述）．

連続の式と，第 1 法則 $d\varepsilon = Tds$，およびオイラーの関係式 $\varepsilon + P = Ts$ を使うと，

$$
0 = u^\mu\partial_\mu\varepsilon + (\varepsilon+P)\partial_\mu u^\mu = T\partial_\mu(su^\mu)\ . \tag{9.95}
$$

つまり，エントロピーが保存することがわかる（断熱）．すなわち完全流体では，散逸（粘性，熱伝導）の効果はない．

非相対論的極限

非相対論的極限は

$$
x^i \to a^{-1}x^i\ ,\quad t\to a^{-2}t\ ,\quad v\to av\ ,\quad P\to a^2P\ , \tag{9.96}
$$

とスケールし，$a\to 0$ 極限をとることに対応する．このスケーリングは $v\ll 1, \varepsilon\gg P$ という条件を意味する．また，流体変化の典型的な長さスケールと時間スケール L, T に対し，$L/T\ll 1$ という条件も意味する．スケーリングの下で

$$
u^\mu = \gamma(1,v^i)\to(1,av^i)\ ,\quad u^\mu\partial_\mu = \gamma(\partial_0+v^i\partial_i)\to a^2(\partial_0+v^i\partial_i) \tag{9.97}
$$

なので，a の最低次で式 (9.90) は，

$$
\frac{d\varepsilon}{d\tau} + (\varepsilon+P)\partial_\mu u^\mu \to a^2\{\partial_0\varepsilon + v^i\partial_i\varepsilon + \varepsilon\partial_i v^i\} + O(a^4) \tag{9.98}
$$

となるので，非相対論的な連続の方程式

$$
\partial_0\varepsilon + \partial_i(\varepsilon v^i) = 0 \tag{9.99}
$$

が導かれる．また，式 (9.94) は

$$
(\varepsilon+P)\frac{du^i}{d\tau} + u^i\frac{dP}{d\tau} + \partial^i P \to a^3\{\varepsilon(\partial_0+v^j\partial_j)v^i + \partial^i P\} + O(a^5) \tag{9.100}
$$

となるので，オイラーの式

$$\varepsilon(\partial_0 + v^j\partial_j)v^i + \partial^i P = 0 \tag{9.101}$$

が導かれる．

9.3.4 粘性流体

微分展開の次のオーダーを考えると，完全流体のときには含まれない散逸の効果を含めることができる．このオーダーであらわれる項を完全流体への付加項 $\tau^{\mu\nu}$ として書くことにする：

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} \ . \tag{9.102}$$

流体静止系では，運動量密度の流れがないので $T^{0i} = 0$ である．また $\varepsilon := T^{00}$ として定義すると，このフレームでは τ^{ij} のみが残る．等方性を仮定すると，2 つの独立な輸送係数があらわれる：

$$\tau_{ij} \overset{RF}{=} -\eta\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k u^k\right) - \zeta\delta_{ij}\partial_k u^k \ . \tag{9.103}$$

トレースレス部分　　トレース部分

トレースレス部分の比例係数 η が**ずり粘性率** (shear viscosity)，トレース部分の比例係数 ζ が**体積粘性率** (bulk viscosity) である．ずり粘性部分の形は，板にはさんだ例（4.1.4 節）の微分形にほかならない．

拡散問題同様，構成方程式 (9.103) の形は，熱力学の第 2 法則から正当化される．エントロピーの発展は連続の式から導出されたので，粘性流体で連続の式を考える．完全流体同様，

$$0 = u_\nu\partial_\mu T^{\mu\nu} \tag{9.104}$$

$$= -u^\mu\partial_\mu\varepsilon - (\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu + u_\nu\partial_\mu\tau^{\mu\nu} \tag{9.105}$$

$$= -T\partial_\mu(su^\mu) - \tau^{\mu\nu}\partial_\mu u_\nu \ . \tag{9.106}$$

ここで，$\tau^{\mu\nu}u_\nu = 0$ を使った（流体静止系で $\tau^{00} = \tau^{0i} \overset{RF}{=} 0$ を意味する）．完全流体と違って，式 (9.106) の第 2 項によりエントロピーは保存しない．さて，対称テンソルは

$$A^{ij} = A^{\langle ij\rangle} + A\delta^{ij} \tag{9.107}$$

$$\text{ここで}\quad A^{\langle ij\rangle} := \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji} - 2A\delta^{ij}) \ , \quad A := A^i{}_i/3 \ , \tag{9.108}$$

と書ける．これを使うと，流体静止系で式 (9.106) は

$$T\partial_\mu(su^\mu) \overset{RF}{=} -\tau^{\langle ij\rangle}\sigma_{ij} + \tau\theta \tag{9.109}$$

$$\sigma_{ij} := \partial_{\langle i}u_{j\rangle} \ , \quad \theta := \partial_k u^k \ , \tag{9.110}$$

と書ける．したがって，

$$\tau^{\langle ij\rangle} = -2\eta\,\sigma^{ij}\ , \quad \tau = -\zeta\theta\ , \tag{9.111}$$

と要求すると，式 (9.109) の右辺は正になる（ただし $\eta, \zeta > 0$）：

$$T\partial_\mu(su^\mu) \overset{RF}{=} 2\eta\,\sigma^{ij}\sigma_{ij} + \zeta\theta^2 > 0\ . \tag{9.112}$$

式 (9.111) をまとめると，式 (9.103) になる．

一方，$\partial_\mu T^{\mu i} = 0$ から粘性流体の運動方程式を導出することができる．ただし，本書では流体方程式は直接使わず，そのつど保存則に戻って議論するので，静止系での形だけを挙げておくことにする：

$$(\varepsilon + P)\frac{du^i}{d\tau} + \partial^i P - \eta\,\partial_j^2 u^i - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\partial^i\partial_j u^j \overset{RF}{=} 0\ . \tag{9.113}$$

これは非相対論的な運動方程式

$$\varepsilon(\partial_0 + \varepsilon v^j\partial_j)v^i + \partial^i P - \eta\,\partial_j^2 v^i - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\partial^i\partial_j v^j = 0 \tag{9.114}$$

に相当する．なお，粘性流体方程式としては**ナヴィエ–ストークス方程式**

$$\varepsilon(\partial_0 v^i + v^j\partial_j)v^i + \partial^i P - \eta\,\partial_j^2 v^i = 0 \tag{9.115}$$

が有名だが，ナヴィエ–ストークス方程式では**非圧縮性** (imcompressibility)，すなわちエネルギー密度が一定の仮定をおく．すると連続の方程式から $\partial_i v^i = 0$ となるので，式 (9.114) の最後の項が落ちる．しかし，この場合音速 $c_s^2 := \partial P/\partial\varepsilon \to \infty$ となり，特殊相対論的に問題になる．このため，相対論的流体では非圧縮性の条件は課さない．

9.3.5 カレントも存在する場合♦

完全流体 + カレント

微分展開の 0 次に戻り，変数としてほかにカレント J^μ が存在する場合を考えることにする：

$$\text{変数：}\quad T^{\mu\nu}\ , \quad J^\mu\ , \tag{9.116}$$

$$\text{保存則：}\quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0\ , \quad \partial_\mu J^\mu = 0\ . \tag{9.117}$$

方程式を閉じるために，あらたに加わった J^μ の変数として，粒子数密度 $n(t, x)$ を選ぶ．平衡状態では流体静止系が存在するので，このフレームで種々の保存量の空間的流れは存在しない．したがって，

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu}\ , \tag{9.118}$$

$$J^\mu = nu^\mu\ . \tag{9.119}$$

連続の式は完全流体の場合と同じであり，これからエントロピー保存 $\partial_\mu(su^\mu) = 0$ も成立する．

粘性流体＋カレント

カレントも存在する場合で，微分展開の 1 次に進もう：

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} \ , \tag{9.120}$$

$$J^\mu = nu^\mu + \nu^\mu \ . \tag{9.121}$$

粘性流体の場合と同様に，流体静止系で $\varepsilon := T^{00}$, $n := J^0$ として定義すると，ゼロでない成分は τ^{ij}, ν^i となる．

非平衡状態を考えるので，空間的流れがあるが，いまの場合（運動量密度も含めると）カレントが複数存在する．しかも，それらは一般に一致する必要はない．つまり，流体静止系と言っても，どのカレントに着目するかで流体静止系が変わってくる．流体静止系では $u^i = 0$ なので，このことはどのカレントに着目した流体静止系を考えるかで，u^μ の定義が変わってくることを意味する．

ここでの定義はランダウ–リフシッツの流儀にしたがったもので，u^μ はエネルギー流束（運動量密度）をあらわす．したがって，$u^i = 0$ の静止系で運動量密度が消える．一方，この定義で粒子流束がない場合は $J^i = nu^i + \nu^i = 0$ なので，$u^i \neq 0$ である．このことは，粒子流束はないがエネルギー流束があることを意味するので，熱伝導をあらわしている．したがって，$\nu^i \propto \kappa$ となる（κ：熱伝導率）．ν^i の具体形は τ^{ij} 同様にもっと決めることもできるが，ここではその議論は省く．完全流体では，粒子流束とエネルギー流束が一致するので，熱伝導はない．したがって，J^μ の各項は

$$J^\mu = nu^\mu + \nu^\mu \tag{9.122}$$

対流　伝導／拡散

という意味をもっている．

このように，u^μ としてエネルギー流束を選んだものを**ランダウ–リフシッツ・フレーム**と呼ぶ．一方で，u^μ として粒子流束を選ぶことも可能であり，この場合を**エッカルト (Eckart)・フレーム**と呼ぶ*14)．

u^μとして エネルギー流束 → ランダウ–リフシッツ・フレーム

粒子流束 → エッカルト・フレーム

エッカルト・フレームでは，u^μ と粒子流束が一致するので $\nu^\mu = 0$ となる一方，$T^{\mu\nu}$ は式 (9.120) ではなく，付加項 $q^{(\mu}u^{\nu)}$ があらわれる（q^μ：熱流）．

どの定義をとるかは，本来は単なるフレームのとりかえにすぎない．しかし，実はより微妙な事情があり，現実にはそうではない（11.3.2 節）．

*14) エッカルト・フレームと呼ぶかわりに，Particle frame や N-frame と呼ばれることもある．これに対応して，ランダウ–リフシッツ・フレームは Energy frame や E-frame と呼ばれる（E-frame の "E" がエッカルトでないのは紛らわしい）．

9.3.6　粘性の久保公式

線形応答理論によると，輸送係数と遅延グリーン関数は関係する．以上の準備を踏まえて，粘性についての久保公式を作ることができる．

拡散係数同様，粘性率も熱力学的内力による応答なので，粘性の久保公式を作るのは少しやっかいである．久保公式の手っとり早い導出は，流体の住む 4 次元時空を弱く曲げて，その応答を評価する方法である．もちろん，実際の実験室でずり粘性を測るのに 4 次元時空を曲げるわけではないし，現実的でもない．これは久保公式を導出する方便である．

とは言え，一般相対論によると，時空のゆらぎによってエネルギー運動量テンソルにゆらぎが生じるはずである．また，天体物理に線形応答理論を使う場合，実際にこのような時空の曲がりを考えなければいけない．さらに，この導出法は AdS/CFT 双対性の枠組みにも自然にとけ込む（10, 11 章）．

ここでは曲がった時空といっても，AdS/CFT のように 5 次元の曲がった時空ではなく，我々の住む 4 次元時空が曲がった場合 $g^{(0)}_{\mu\nu}$ を想定していることに注意しよう．実は AdS/CFT によると，$g^{(0)}_{\mu\nu}$ は 5 次元に起源をもつのだが，この議論自体は AdS/CFT とは無関係である．この点混乱しやすいので注意しよう．

では線形応答理論の考えにしたがい，

1. 4 次元時空で重力の摂動を考えることで $\delta\langle T^{\mu\nu}\rangle$ をもたらす．
2. 我々が最終的に求めたいのは輸送係数なので，この期待値を輸送係数で表現する．

粘性は現象論的には構成方程式 (9.103) で定義されるが，これは平坦な時空のものなので，重力の摂動を考えるには適切ではない．まず曲がった時空の場合に構成方程式を拡張する必要がある：

$$\tau^{\mu\nu} = -P^{\mu\alpha}P^{\nu\beta}\left\{\eta\left(\nabla_\alpha u_\beta+\nabla_\beta u_\alpha-\frac{2}{3}g^{(0)}_{\alpha\beta}\nabla\cdot u\right)+\zeta g^{(0)}_{\alpha\beta}\nabla\cdot u\right\}\ . \tag{9.123}$$

ここで，

- ∇_μ は，ただの微分ではなく，曲がった時空での共変微分をあらわす．
- $P^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ は空間方向への**射影テンソル** (projection tensor) で，これにより構成方程式は座標不変な形式で書かれる．平坦な時空で流体静止系 $u^\mu \overset{RF}{=} (1,0,0,0)$ では，

$$P^{\mu\nu} \overset{RF}{=} \mathrm{diag}(0,1,1,1)\ . \tag{9.124}$$

したがって，$P^{\mu\nu}$ はたしかに空間方向への射影という意味をもつ．

$\tau^{\mu\nu}$ を評価するうえで，以下を使う：

- $x^\mu = (t, x, y, z)$ という座標系をとる．
- 一般の摂動 $h^{(0)}_{\mu\nu}$ を考えても構わないが，ずり粘性率 η を評価するには

$$g^{(0)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h^{(0)}_{xy}(t) & 0 \\ 0 & h^{(0)}_{xy}(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.125}$$

  という形の計量で十分である．式 (9.123) を使って，摂動の 1 次までで τ^{xy} を評価する（以下の "$\sim$" は，このオーダーで寄与する部分という意味である）．
- 流体静止系 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$，つまり $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ をとる．簡単のため，以下では "$\overset{RF}{=}$" の RF は省く．空間的に一様な摂動 (9.125) を考えているため，流体は運動をはじめたとしても一様にしか運動できない：$u_i = u_i(t)$．しかし，特定の方向への運動はパリティ不変性から禁止される．結果的に，流体は静止したままである．

流体が静止しているので，共変微分で寄与するのはクリストッフェル記号の部分だけである：

$$\nabla_x u_y = \partial_x u_y - \Gamma^\alpha_{xy} u_\alpha = -\Gamma^0_{xy} u_0 = \Gamma^0_{xy} \ . \tag{9.126}$$

$\nabla_y u_x$ も同様である．ほかの成分は 0 になる．$\nabla_x u_y$ が摂動の 1 次なので，$\nabla \cdot u$ は摂動の 2 次である．したがって，式 (9.123) 大カッコ内で τ^{xy} に寄与するのは，最初の 2 項だけである：

$$\delta\langle\tau^{xy}\rangle \sim -\eta(\nabla_x u_y + \nabla_y u_x) \ . \tag{9.127}$$

（式 (9.123) の大カッコ内が摂動の 1 次なので，射影テンソルは式 (9.124) という形で十分である.）クリストッフェル記号を評価すると，

$$\Gamma^0_{xy} = \frac{1}{2} g^{(0)00} (\partial_y g^{(0)}_{0x} + \partial_x g^{(0)}_{0y} - \partial_0 g^{(0)}_{xy}) = \frac{1}{2} \partial_0 h^{(0)}_{xy} \ . \tag{9.128}$$

したがって，

$$\delta\langle\tau^{xy}\rangle = -2\eta\Gamma^0_{xy} = -\eta\partial_0 h^{(0)}_{xy} \ . \tag{9.129}$$

フーリエ変換すると

$$\boxed{\delta\langle\tau^{xy}\rangle = i\omega\eta h^{(0)}_{xy}} \tag{9.130}$$

これがほしい結果である．これは線形応答関係式 (9.31) と同じ形をしている．式 (9.31) と (9.130) を組み合わせたものが，η についての**久保公式**である：

$$\eta = -\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\, G_R^{xy,xy}(\omega, \boldsymbol{k}=0)\ . \tag{9.131}$$

同様の考察から，ζ をはじめとする輸送係数に対する式も導出することができる[*15)]：

$$\zeta = -\frac{1}{9}\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\, G_R^{\mathrm{tr}}(\omega, \boldsymbol{k}=0)\ , \tag{9.133}$$

$$G_R^{\mathrm{tr}} = -i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, e^{-ik\cdot x}\theta(t)\left\langle [T^i{}_i(t,\boldsymbol{x}), T^j{}_j(0,\boldsymbol{0})]\right\rangle\ . \tag{9.134}$$

9.3.7 線形方程式のポール

拡散の場合は，久保公式 (9.80) とグリーン関数のポール (9.81) という 2 種類の方法で拡散係数を得ることができる．同様に，粘性はグリーン関数のポールからも求めることができる．そこで，線形流体方程式のポールを求めよう．

- 線形化：

$$\varepsilon(t,\boldsymbol{x}) = \delta\varepsilon(t,\boldsymbol{x}) + \bar{\varepsilon}\ , \quad v^i(t,\boldsymbol{x}) = \delta v^i(t,\boldsymbol{x})\ , \tag{9.135}$$

  等とし δ の 1 次までとる．“$^-$” つきの量は，平衡状態での値をあらわし，δ は平衡状態からのズレをあらわす．$\bar{v}^i$ は一般性を失うことなく，ゼロとおけることに注意しよう．$u^0 = 1/\sqrt{1-v^2} \sim 1$, $u^i = v^i/\sqrt{1-v^2} \sim v^i$ である．

- テンソル分解：

$$u^i = u^i(t,z)\ , \quad P = P(t,z)\ , \tag{9.136}$$

  とし，$x^a = (x,y)$ で作られる little group $SO(2)$ の下での変換性で分類する：

$$\text{テンソル：}\ T^{xy}, T^{xx} = -T^{yy}\ , \tag{9.137a}$$

$$\text{ベクトル：}\ T^{0a}, T^{za}\ , \tag{9.137b}$$

$$\text{スカラー：}\ T^{00}, T^{0z}, T^{zz}, T^{xx} = T^{yy}\ . \tag{9.137c}$$

  テンソル分解をするのは，各モードが違う変換性をもつため，たがいの運動方程式が結合しないからである．

各モードが結合しないので，モードごとに線形化した運動方程式を考える．その導出には式 (9.114) といった流体方程式から出発することも可能だが，ここではもとの保存則 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ から出発する．なお，ここでの言葉を用いれば，9.3.6 節の久保公式の導出はテンソルモードを使ったことになる．

---

*15)

$$g^{(0)}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-1, 1+h^{(0)}(t), 1+h^{(0)}(t), 1+h^{(0)}(t)\right) \tag{9.132}$$

という形の摂動を考えればよい．

ベクトルモード

このモードに属する成分を書き下すと，

$$T^{za} = (\varepsilon + P)u^z u^a - \eta(\partial^z u^a + \partial^a u^z) \sim -\eta\partial^z u^a \ , \tag{9.138}$$

$$T^{0a} = (\varepsilon + P)u^0 u^a \sim (\bar{\varepsilon} + \bar{P})u^a \ . \tag{9.139}$$

$u^a \sim e^{-i\omega t + iqz}$ という形に対し，保存則の a 成分は

$$0 = \partial_0 T^{0a} + \partial_z T^{za} \sim (\bar{\varepsilon} + \bar{P})\partial_0 u^a - \eta\partial_z^2 u^a \propto -i\omega(\bar{\varepsilon} + \bar{P}) + \eta q^2 \ . \tag{9.140}$$

したがって，分散関係は

$$\omega = -i\frac{\eta}{\bar{\varepsilon} + \bar{P}}q^2 \tag{9.141}$$

$$= -i\frac{\eta}{\bar{T}\bar{s}}q^2 \quad (\mu = 0 \text{ の場合}) \ . \tag{9.142}$$

カレントの場合 (9.66) と比べてわかるように，$D_\eta := \eta/(\bar{\varepsilon} + \bar{P})$ は拡散係数の役割を果たす．非相対論的（$\bar{P} \ll \bar{\varepsilon}$）に対応する量 $\nu := \eta/\bar{\varepsilon}$ を**動粘性係数** (kinematic viscosity) と言う．

11 章でみるように $\eta/\bar{s}$ という量は，**AdS/CFT でとくに興味深い量である**[*16]．化学ポテンシャルがある $\mu \neq 0$ の場合，$\eta/\bar{s} \neq \bar{T}D_\eta$ だが，そのとき重要なのは，TD_η ではなく $\eta/\bar{s}$ の方である．AdS/CFT は $\eta/\bar{s}$ に対して普遍的な結果を与えるからである．

スカラーモード

同様に，スカラーモードの場合は，

$$T^{00} = (\varepsilon + P)u^0 u^0 - P \sim \varepsilon \ , \tag{9.143}$$

$$T^{0z} = (\varepsilon + P)u^0 u^z \sim (\bar{\varepsilon} + \bar{P})u^z \ , \tag{9.144}$$

$$T^{zz} = (\varepsilon + P)u^z u^z + P - \eta\left(2 - \frac{2}{3}\right)\partial_z u^z - \zeta\partial_z u^z \tag{9.145}$$

$$\sim P - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\partial_z u^z \ . \tag{9.146}$$

保存則の $0, z$ 成分は

$$0 = \partial_0 T^{00} + \partial_z T^{z0} \sim \partial_0\varepsilon + (\bar{\varepsilon} + \bar{P})\partial_z u^z \ , \tag{9.147}$$

$$0 = \partial_0 T^{0z} + \partial_z T^{zz} \ . \tag{9.148}$$

式 (9.148) の z 微分から，式 (9.147) の 0 微分を引くと，

---

*16)　簡単のため，以下の章では “¯” は外して表記する．

$$
\begin{aligned}
0 &= -\partial_0^2 T^{00} + \partial_z^2 T^{zz} &(9.149)\\
&= -\partial_0^2 \varepsilon + \partial_z^2 P - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\partial_z^3 u^z &(9.150)\\
&= -\partial_0^2 \varepsilon + \partial_z^2 P + \frac{\frac{4}{3}\eta + \zeta}{\bar{\varepsilon} + \bar{P}}\partial_0\partial_z^2 \varepsilon\ . &(9.151)
\end{aligned}
$$

最後の式で，式 (9.147) を使った．**音速**を c_s とすると，$\partial_z^2 P = (\partial P/\partial\varepsilon)\partial_z^2\varepsilon =: c_s^2\partial_z^2\varepsilon$ である．したがって，運動量空間では

$$
\omega^2 + i\Gamma_{\rm s}\omega q^2 - c_s^2 q^2 = 0\ , \tag{9.152}
$$

$$
\Gamma_{\rm s} := \frac{1}{\bar{\varepsilon} + \bar{P}}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\ . \tag{9.153}
$$

式 (9.152) を分散関係の形 $\omega = \ldots$ に書きかえる．流体力学では微分展開を考えており，粘性流体の方程式は 2 階微分までを含む．そこで分散関係は $O(q^2)$ までとることにする：

$$
\omega = \pm c_s q - \frac{i}{2}\Gamma_{\rm s} q^2 + O(q^3)\ . \tag{9.154}
$$

第 1 項は，速度 c_s で伝搬する一対の音波をあらわしている．第 2 項は式 (9.66) と同じ形であり，音波の減衰をあらわす．このため $\Gamma_{\rm s}$ を**音波の減衰定数** (sound attenuation constant) と言う．ベクトルモードと違い，音波の減衰は，η だけでなく ζ との組み合わせで決まる．

以下の章では，ここで得られた久保公式や分散関係の知識を使って，ゲージ理論の輸送係数を求める．その前に，線形応答理論の考え方を利用しながら，非平衡の場合の AdS/CFT について議論する．

第 10 章
AdS/CFT–非平衡系の場合

非平衡の場合に AdS/CFT を応用するのに欠かせない GKP–ウィッテン関係式を簡単な例で説明する．また，AdS/CFT でしばしば調べられるさまざまな漸近的 AdS 時空を紹介する．

10.1 GKP–ウィッテン関係式

AdS/CFT は

$$Z_{ゲージ} = Z_{\mathrm{AdS}} \tag{10.1}$$

を主張するが，非平衡の場合に拡張したものを（狭義の）**GKP–ウィッテン関係式**[15], [16] と呼ぶ*1)：

$$\boxed{\left\langle \exp\left(i \int \phi^{(0)} \mathcal{O} \right) \right\rangle = e^{i\underline{S}[\phi|_{u=0}=\phi^{(0)}]}} \tag{10.2}$$

まず，

- これまでと同様，左辺が 4 次元のゲージ理論（**境界理論**）をあらわし，右辺が 5 次元の重力理論（**バルク理論**）をあらわしている．
- ϕ は重力理論のある場，$\mathcal{O}$ はゲージ理論のあるオペレーターをあらわす．ここでは ϕ と $\mathcal{O}$ は模式的に書いたもので，具体例は以下で述べる．
- ここでは適当な座標で AdS 境界（6.1.4 節）を $u = 0$ とする．

ほかの表記については以下で説明する（図 10.1 も参照のこと）．この関係式を

*1) ♦ 正確には，GKP–ウィッテン関係式はもともとユークリッド形式で定式化されている．ここではダイナミクスに興味があるので，GKP–ウィッテン関係式の Lorentzian バージョンを使う[32]．ユークリッド形式と Lorentzian 形式ではその処方箋にいくつか重要な違いがあり，たとえば 11.1.1 節で述べる境界条件の違いがある．また，Lorentzian の式 (10.2) もあまり字句通りに受けとってはいけない（10.2.3 節）．

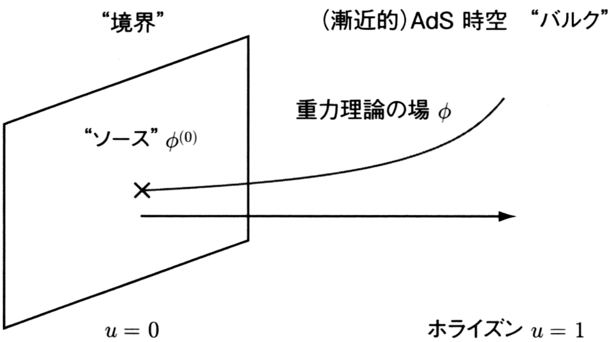


図 10.1　GKP–ウィッテン関係式を説明するための概念図.

理解するために，左辺と右辺をそれぞれ詳しくみてみよう.

GKP–ウィッテン関係式の左辺（場の理論）

まず，GKP–ウィッテン関係式の左辺は

$$(\text{左辺}) = \left\langle \exp\left(i\int \phi^{(0)}\mathcal{O} \right) \right\rangle . \tag{10.3}$$

ここで $\langle\cdots\rangle$ はアンサンブル平均をあらわす．これは，外場 $\phi^{(0)}$ を加えたときの 4 次元の場の理論の生成汎関数である．とくに，この摂動は線形応答理論で考えた摂動 (9.12) そのものである．線形応答理論でみたように，この左辺が計算できれば輸送係数を知ることができるが，強結合では実際には計算は困難である．そこで，AdS/CFT では GKP–ウィッテン関係式の右辺，重力理論を使ってこれを評価する.

GKP–ウィッテン関係式の右辺（重力理論）

GKP–ウィッテン関係式の右辺

$$(\text{右辺}) = e^{i\underline{S}[\phi|_{u=0}=\phi^{(0)}]} \tag{10.4}$$

は，本来は 5 次元の重力理論の生成汎関数である．それを鞍点近似を使い，重力理論の古典解で近似したものである．これは，3.2.2 節のブラックホール熱力学量の計算などと同じである．ゲージ理論の立場では，ラージ N_c 極限をとったことに相当する（5 章）.

したがって，熱力学量の計算と同様，

- $\underline{S}$ は on-shell 作用である．すなわち，AdS 境界での境界条件 $\phi|_{u=0} = \phi^{(0)}$ の下で，重力理論の場 ϕ の運動方程式を解く*2)．そうやって得られた解を

*2)　まぎらわしいが，GKP–ウィッテン関係式に出てくる ϕ は，式 (10.7) のようなスカラー場に限らない．ϕ は 5 次元重力理論の場をまとめてあらわしたものである．また，$u \to 0$ で場が定数にならず，$\phi \sim u^{\Delta_-}$ として振るまう場合，$\phi|_{u=0} = \phi^{(0)}u^{\Delta_-}$ として $\phi^{(0)}$ を定義する（あとの一般のスカラー場の例を参照）.

作用に代入したものである．

- ϕ は運動方程式を満たすので，on-shell 作用は AdS 境界での表面項に帰着する．このようにして，5 次元から 4 次元の量が出てくる．この表面項をゲージ理論の生成汎関数と同定する．

この意味で，ゲージ理論の生成汎関数は AdS 境界で定義される．これを，よく大ざっぱに「ゲージ理論は境界に住む」と言う．

4 次元の場の理論の立場では $\phi^{(0)}$ は外場だが，5 次元の重力理論の立場ではこれは 5 次元時空を伝搬する場 ϕ である．すなわち，AdS/CFT は場の理論の外場に 5 次元的意味をもたせられると主張しており，これが GKP–ウィッテン関係式の一つのポイントである．または，

バルクの場は，境界のオペレーターの外場として働く

我々が求めたいのは，ゲージ理論の生成汎関数だが，GKP–ウィッテン関係式はこれが重力理論の作用を評価することで求められると主張する．GKP–ウィッテン関係式の両辺を外場 $\phi^{(0)}$ で汎関数微分すると，例えば一点関数が得られる：

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\delta \underline{\mathcal{S}}[\phi^{(0)}]}{\delta \phi^{(0)}} \,. \tag{10.5}$$

以下では，さまざまな例を通して，この量を計算する．

重力理論の具体形

5 章の議論より，on-shell 作用の評価に使う作用 $\mathcal{S}$ は，負の宇宙定数をもつ 5 次元一般相対論の作用である：

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) + \mathcal{S}_{\text{matter}} \,. \tag{10.6}$$

物質場の作用 $\mathcal{S}_{\text{matter}}$ は典型的にはマクスウェル場やスカラー場を含む*3)：

$$\mathcal{S}_{\text{matter}} = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{L^2}{4} F_{MN}^2 - \frac{1}{2}(\nabla_M \phi)^2 - V(\phi) \right\} \,. \tag{10.7}$$

どのような 5 次元物質場がどのように入るかは，4 次元のゲージ理論次第である．これを具体的に知るには，5 章で議論したような超弦理論と D ブレーンの知識が不可欠であるが，10.3 節でいくつかの代表的な例を簡単に紹介する．

作用 (10.6) の解としては，漸近的*4) AdS 時空がある：

---

*3)　次元を $[A_M] = \mathrm{L}^{-1}$, $[\phi] = \mathrm{L}^0$ となるように選んだ．

*4)　$u \to 0$ 極限という意味．座標 u はゲージ理論のエネルギースケールの逆として振るまう (6.3 節)．したがって，漸近的にスケール対称性 (6.66) があるということは，AdS/CFT であらわれるゲージ理論は，高エネルギーでスケール対称性が回復する理論だということである．この点，QCD とは高エネルギーでの振るまいが大きく異なる．

$$ds^2 \sim \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + d\boldsymbol{x}^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2} \ , \qquad (r \to \infty) \tag{10.8}$$

$$= \left(\frac{L}{u}\right)^2 (-dt^2 + d\boldsymbol{x}^2 + du^2) \ , \qquad (u \to 0) \tag{10.9}$$

$$(\text{物質場}) \sim 0 \ , \tag{10.10}$$

$(u := L^2/r)$. AdS 境界は $r \to \infty$ ないしは $u = 0$ に位置する．今後，

1. このような時空を背景場として考え，摂動を加える．
2. 摂動には，重力摂動や物質場の摂動があるが，ゲージ理論で計算したいオペレーター $\mathcal{O}$ に対応するバルク場 ϕ の摂動を選ぶ．
3. 摂動の古典解を求めたら，作用に代入して on-shell 作用を求める．

ここで書いた手続きは，言葉にするとわかりにくいかもしれない．実際にやってみた方がわかりやすいので，次に簡単な例を考える．

10.2 簡単な例

10.2.1 スカラー場の場合

この 10.2.1 節は AdS/CFT での計算の典型例なので，注意深く読んでほしい．結局のところ，AdS/CFT でおこなう計算はこの例と大差ない．

場とオペレーターの対応

まずバルク場の例として，質量ゼロのスカラー場を考える*5)：

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} (\nabla_M \phi)^2 \ . \tag{10.11}$$

これは例なので，スカラー場に結合する境界理論のオペレーターを具体的に指定する必要はない．単に $\mathcal{O}$ とする．

式 (10.11) の on-shell 作用を評価するのだが，以下の議論では AdS 境界 $u \to 0$ での漸近形のみを問題にする．このため，計量 (10.9) を使えば十分である（以下の "$\sim$" は漸近的に成立することを示す）．また，簡単のために境界方向に一様な解 $\phi = \phi(u)$ を考える．$\sqrt{-g} \sim u^{-5}$, $g^{uu} \sim u^2$ を使い，式 (10.11) を部分積分すると，

$$\mathcal{S} \sim \int d^4x \, du \ -\frac{1}{2u^3} \phi'^2 \qquad (' := \partial_u) \tag{10.12}$$

$$= \int d^4x \int_0^1 du \left(-\frac{1}{2u^3} \phi \phi' \right)' + \left(\frac{1}{2u^3} \phi' \right)' \phi \tag{10.13}$$

$$= \int d^4x \ \frac{1}{2u^3} \phi \phi' \bigg|_{u=0} + \int d^4x \, du \left(\frac{1}{2u^3} \phi' \right)' \phi \ . \tag{10.14}$$

*5) アインシュタイン–ヒルベルト作用はスカラー場を含まないので，以下の議論にはスカラー場の作用だけで十分である．なお，簡単のために 10.2 節では $L = 16\pi G_5 = 1$ とする．

式 (10.14) の第 2 項目は，単に運動方程式

$$\left(\frac{1}{2u^3}\phi'\right)' \sim 0 \tag{10.15}$$

である．運動方程式は 2 階なので，2 つの独立解がある．これらの漸近形は

$$\phi \sim \phi^{(0)}\left(1+\phi^{(1)}u^4\right) \ , \quad (u \to 0) \tag{10.16}$$

となることが，式 (10.15) に代入することでわかる．

さて，運動方程式を使うと，作用 (10.14) は on-shell では表面積分のみになる：

$$\underline{\mathcal{S}} \sim \int d^4x \ \frac{1}{2u^3}\phi\phi'\bigg|_{u=0} \ . \tag{10.17}$$

したがって，漸近形 (10.16) を代入することで，

$$\underline{\mathcal{S}}[\phi^{(0)}] = \int d^4x\, 2\phi^{(0)\,2}\phi^{(1)} \ . \tag{10.18}$$

この結果を GKP–ウィッテン関係式に代入することで，一点関数は

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \frac{\delta\underline{\mathcal{S}}[\phi^{(0)}]}{\delta\phi^{(0)}} = 4\phi^{(1)}\phi^{(0)} \ . \tag{10.19}$$

以上得られた結果をまとめると，

$$\phi \sim \phi^{(0)} + \frac{1}{4}\langle\mathcal{O}\rangle u^4 \ , \quad (u \to 0) \tag{10.20}$$

あるいは*6)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{バルク場の遅く落ちる項} \to \ \text{外場} \\ \text{バルク場の早く落ちる項} \to \ \text{応答}\end{array}} \tag{10.21}$$

これはスカラー場での例だが，以下でみるように，マクスウェル場や重力場でも同様の関係が成立する*7)．やや複雑になるだけで，やることは同じである．

この段階で，$O(1)$ と $O(u^4)$ の項は独立解である．しかし，これらの間には線形応答関係式が成りたつはずである．AdS/CFT の立場では，AdS 時空内部（ブラックホールのホライズン）に境界条件を課すことに相当する．この境界条件については，11.1 節で議論する．すると，線形摂動の場合，$O(1)$ と $O(u^4)$ の項は全体の係数 $\phi^{(0)}$ を除きユニークに決まる（$\phi^{(1)}$ がユニークに決まる）．

---

*6) ♦ バルク場の早く落ちる項，遅く落ちる項というのは，正確には場が規格化可能か (normalizable) どうかという意味である．規格化可能な場は量子化でき，一方できない場はむしろ外場として考えるべきである．そのように考えると，遅く落ちる項であっても，規格化可能というケースがありえる．これは実際みられる現象で，この場合外場とオペレーターの意味づけを逆転することもできる [33]．そのことも勘案してはじめて場の理論との対応がうまくつくようになっている．

*7) ♦ 重力場の場合，この関係は正確には成りたたない．この関係に修正が加わることではじめて，流体力学とうまく対応がつくという構造になっている（11.4 節）．

それを先どりして書いたのが，式 (10.16) の漸近形である．

その点を考慮に入れると，式 (10.19) は線形応答関係式 (9.28) にほかならない*8)．式 (10.19) と式 (9.28) を比べると，AdS/CFT は遅延グリーン関数 G_R を

$$G_R = -4\phi^{(1)} \tag{10.22}$$

と決めることがわかる．ここでは例なので，実際に $\phi^{(1)}$ は求めないが，実質 11.1.4 節で計算する．なお，最終的に必要なのは AdS 境界での量だが，バルク時空内部で境界条件を課す必要があるため，バルク時空全域で解を求める必要があることに注意．これは AdS/CFT での典型的な事情である．

コンフォーマル次元

AdS 時空は

$$x^\mu \to a x^\mu, \quad r \to \frac{1}{a} r\ , \tag{10.23}$$

というスケール対称性をもっていたが，いま考えている量が，スケーリングの下で r のように振るまう場合を**コンフォーマル次元 1** とする．境界時空 x^μ の立場では，この変換は場の理論で議論されるスケール変換であり，このコンフォーマル次元の定義も場の理論で使われるものと一致している．大ざっぱには質量次元に一致する．

バルク時空の立場では，スケール変換は一般座標変換の一部にすぎないので，バルク場 ϕ はスケール変換の下で不変である．したがって，式 (10.20) より

$$\boxed{\begin{array}{ll} \phi^{(0)} \to \phi^{(0)}: & \phi^{(0)}\text{ はコンフォーマル次元 } 0 \\ \langle\mathcal{O}\rangle \to a^{-4}\langle\mathcal{O}\rangle: & \langle\mathcal{O}\rangle\text{ はコンフォーマル次元 } 4 \end{array}} \tag{10.24}$$

ということがわかる．境界理論の立場では，

$$\delta\mathcal{S}_{\rm QFT} = \underset{\substack{\downarrow \\ a^4}}{\int d^4x}\, \underset{\substack{\downarrow \\ a^0}}{\phi^{(0)}}\, \underset{\substack{\downarrow \\ a^{-4}}}{\mathcal{O}} \tag{10.25}$$

という摂動作用がスケール不変ということに対応する．このようなコンフォーマル次元をもつ一例としては，グラビトン $h^{(0)}_{\mu\nu}$ とエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ が挙げられる．(この例については 11.1 節を参照.)

---

*8) ♦ 本来，線形応答関係式に出ているのは $\delta\langle\mathcal{O}\rangle = \langle\mathcal{O}\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle_0$ である．しかし，以下多くの例では，$\langle\mathcal{O}\rangle_0 = 0$ なので，$\delta\langle\mathcal{O}\rangle = \langle\mathcal{O}\rangle$ となる．バルクの立場では，ϕ の摂動のみを考え，ϕ の背景場がないことに相当する．

場とオペレーターの対応：具体例

実際に境界理論のどのオペレーターが，バルク理論のどの場に対応するのだろうか？　流体力学の主たる興味は保存量，$T^{\mu\nu}$ やカレント J^{μ} である．そこで，これらのオペレーターを考えよう．9 章の議論より，これらのオペレーターは外場 $h_{\mu\nu}^{(0)}$, $A_{\mu}^{(0)}$ による応答である．境界理論の外場に対応するバルク理論の場は，外場を 5 次元の伝搬する場に格上げしたものである．したがって，

境界理論のオペレーター		外場		バルク理論の場
$T^{\mu\nu}$	$\leftrightarrow$	$h_{\mu\nu}^{(0)}$	$\rightarrow$	重力の摂動 h_{MN}
J^{μ}	$\leftrightarrow$	$A_{\mu}^{(0)}$	$\rightarrow$	マクスウェル場 A_M

という対応が自然である．この対応も AdS/CFT 辞書の一部である．これらの対応は自然であり，超弦理論の知識がなくても推測できるが，より詳細なオペレーターとバルク場の対応を知るには，やはり超弦理論の知識が欠かせない．

混乱しやすいのだが，上の表のマクスウェル場 A_M は 5 次元バルクの場である．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のような 4 次元境界理論のゲージ場 $(A_\mu)^i{}_j$ ではない．

10.2.2　ほかの例

マクスウェル場の場合

もう一つ例として，今度は境界理論が $U(1)$ カレント J^{μ} をもつ場合を考えよう．この段階では，カレントを具体的には特定しない．通常の電磁気学的なカレントかもしれないが，それに限定されるわけではない（9.3.2 節を参照）．$\rho := \langle J^0 \rangle$ は粒子数密度，あるいは電荷密度であり，ρ に対する化学ポテンシャルを μ とする．

上の議論から，このような場合はバルクのマクスウェル場 A_0 がある場合に相当する．したがって，今度は

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^5x\,\sqrt{-g}F_{MN}^2 \tag{10.26}$$

を評価することになる．マクスウェル場の場合，漸近的な振るまいは式 (10.16) のかわりに，

$$A_0 \sim A_0^{(0)}\left(1 + A_0^{(1)}u^2\right)\ ,\quad (u \to 0) \tag{10.27}$$

となる．これらの振るまいの物理的意味は明らかである．遅く落ちる項が定数になるのは，ゲージ・ポテンシャルが F_{MN} のように微分でしか入っていないためである（すなわちゲージ不変性から来る）．一方，早く落ちる項のベキは，単にバルク 5 次元のクーロンの法則をあらわしている．

スカラー場の議論同様，実際にマクスウェル場の作用を評価することで

$$\mu = A_0^{(0)} \ , \tag{10.28}$$

$$\langle J^0 \rangle \simeq A_0^{(1)} A_0^{(0)} \ , \tag{10.29}$$

と解釈される．後者は J^0 に対する線形応答関係式 (9.33) にほかならない．

もちろん，A_x についても同様の式が成りたつ：

$$\langle J^x \rangle \simeq A_x^{(1)} A_x^{(0)} \ . \tag{10.30}$$

こちらは，式 (9.35) にほかならない．9.1.3 節の議論から，

$$\sigma(\omega) = \frac{A_x^{(1)}}{i\omega} \ . \tag{10.31}$$

したがって，バルクの立場では，A_x を解き $A_x^{(1)}$ を求めることで伝導率 σ を決めることができる．13.3 節のホログラフィック超伝導では，この計算から伝導率の発散を示す．

ゲージ場は 1 フォームなので，スケール変換 (10.23) の下で $A_\mu \to A_\mu/a$，すなわち A_μ はコンフォーマル次元 1 をもつ．したがって，スカラー場と同様の議論から，

$$\begin{aligned} A_\mu^{(0)} &\to a^{-1} A_\mu^{(0)} \ , \\ \langle J^\mu \rangle &\to a^{-3} \langle J^\mu \rangle \ . \end{aligned} \tag{10.32}$$

つまり，カレントはコンフォーマル次元 3 である．これはたしかに $(3+1)$ 次元のカレントの次元に一致する（$c = \hbar = 1$ の単位系では電荷は無次元である.）

一般のスカラー場の場合 ♦

一般のスカラー場の場合，

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int d^{p+2}x \sqrt{-g} \{ (\nabla_M \phi)^2 + m^2 \phi^2 \} \ . \tag{10.33}$$

運動方程式を解くと，漸近的な振るまいは式 (10.16) のかわりに，

$$\phi \sim u^{\Delta_\pm} \ , \qquad \Delta_\pm = \frac{p+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(p+1)^2}{4} + m^2} \ , \tag{10.34}$$

となる[*9]．とくに遅く落ちるモードは，$\phi \sim u^{\Delta_-}$ のように発散してしまう[*10]．そこで，この場合は $\phi^{(0)}$, $\langle \mathcal{O} \rangle$ を

$$\phi \sim \phi^{(0)} u^{\Delta_-} + c \langle \mathcal{O} \rangle u^{\Delta_+} \ , \quad (u \to 0) \tag{10.35}$$

として定義する（c は適当な係数）．質量ゼロの場合と同様に，

---

*9） この式は，AdS 時空の場合，$m^2 < 0$ であっても $m^2 \geq -(p+1)^2/4$ であれば理論が安定であることを示す (**Breitenlohner–Freedman bound**).

*10） $m^2 > 0$ の場合.

$$\phi^{(0)} \to a^{-\Delta_-}\phi^{(0)} ,$$
$$\langle \mathcal{O} \rangle \to a^{-\Delta_+}\langle \mathcal{O} \rangle . \tag{10.36}$$

式 (10.34) より $\Delta_+ + \Delta_- = p+1$ なので，境界理論の $\delta \mathcal{S}_{\text{QFT}} = \int d^{p+1}x\, \phi^{(0)}\mathcal{O}$ はやはりスケール不変である．また，AdS_5 時空で $m=0$ の場合 $(\Delta_-, \Delta_+) = (0,4)$ となり，たしかに質量ゼロのスカラー場の例に帰着する．

10.2.3 Lorentzian 処方箋について ♦

GKP–ウィッテン関係式は本来ユークリッド形式であり，Lorentzian で字句通りに使うと困った結果が得られる．Lorentzian で GKP–ウィッテン関係式の結果を正しく解釈するための処方箋をきちんと与えておく．

例として考えるのは，質量ゼロのスカラー場である：

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^5x\sqrt{-g}(\nabla_M\phi)^2 . \tag{10.37}$$

今回は SAdS_5 ブラックホールでこれを評価する．座標系は式 (7.40) を使う．また，境界時空方向に非一様な摂動を考えるために，境界時空 $x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$ に対して，フーリエ変換をする：

$$\phi(t,\boldsymbol{x},u) = \int (dk)\, e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\phi_k(u) , \quad (dk) := \frac{d^4k}{(2\pi)^4} . \tag{10.38}$$

SAdS_5 ブラックホールの場合，$\sqrt{-g} = u^{-5}$, $g^{uu} = hu^2$ なので[*11]，10.2.1 節と同様の議論から

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^4x\, du\, \{g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g^{uu}\phi'^2\} \tag{10.39}$$
$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\, du \int (dk)(dk')\, u^{-5}\{g^{\mu\nu}(ik'_\mu)(ik_\nu)\phi_{k'}\phi_k + hu^2\phi'_{k'}\phi'_k\} \times e^{i(k+k')\cdot x} \tag{10.40}$$
$$= \int (dk)\int_0^1 du \left\{ -\frac{h}{2u^3}\phi'_{-k}\phi'_k - \frac{g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu}{2u^5}\phi_{-k}\phi_k \right\} \tag{10.41}$$
$$= \int (dk)\int_0^1 du \left\{ \left(-\frac{h}{2u^3}\phi_{-k}\phi'_k \right)' + \frac{1}{2}(\text{EOM})\phi_{-k} \right\} \tag{10.42}$$

したがって，

$$\underline{\mathcal{S}} = \int (dk) \left\{ \frac{h}{2u^3}\phi_{-k}\phi'_k \bigg|_{u=0} - \frac{h}{2u^3}\phi_{-k}\phi'_k \bigg|_{u=1} \right\} . \tag{10.43}$$

ここで，ユークリッド定式化と違い，Lorentzian 定式化ではホライズンも「境界」として考えるべきだろうから，ホライズンからの寄与も考慮している．この寄与については，以下でさらに議論する．

いま，ϕ_k の解を $\phi_k = \phi_k^{(0)} f_k(u)$ とする．定義より f_k は $f_k(u\to 0) = 1$ を

*11） 簡単のために $r_0 = L = 16\pi G_5 = 1$ とする．

満たす．すると，

$$\underline{S}[\phi^{(0)}] = \int (dk)\, \phi^{(0)}_{-k} \left\{ \mathcal{F}_k|_{u=0} - \mathcal{F}_k|_{u=1} \right\} \phi^{(0)}_k \ , \tag{10.44}$$

$$\mathcal{F}_k(u) := \frac{h}{2u^3} f_{-k} f'_k \ . \tag{10.45}$$

GKP–ウィッテン関係式によると，一点関数は

$$\langle \mathcal{O}_k \rangle = \frac{\delta \underline{S}[\phi^{(0)}]}{\delta \phi^{(0)}_{-k}} \tag{10.46}$$

より求められるが，まともに変分すると

$$\langle \mathcal{O}_k \rangle \stackrel{?}{=} \left\{ (\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_{-k})|_{u=0} - (\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_{-k})|_{u=1} \right\} \phi^{(0)}_k \tag{10.47}$$

となる．しかし，これは一点関数としては都合が悪い．なぜなら，フーリエ変換された一点関数は一般に複素であるべきだが，上の表式は虚部を含まないからである：

1. Lorentzian 定式化ではホライズンも「境界」として考えるべきなので，ホライズンからの寄与も考えることにした．ところが，ホライズンからの寄与と AdS 境界からの寄与をあわせると，$\mathcal{F}_k|^{u=1}_{u=0}$ には虚部がないことを示すことができる*12)．
2. かりにホライズンからの寄与を捨てたとしても，依然問題は残る．$\phi(t, \boldsymbol{x}, u)$ は実関数なので，$\phi_k(u) = \phi^*_{-k}(u)$ を満たす．このため，$\mathcal{F}_{-k} \simeq f_k f'_{-k} = f^*_{-k} f'^*_k \simeq \mathcal{F}^*_k$ に注意すると，$\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_{-k} = \mathcal{F}_k + \mathcal{F}^*_k = 2\mathrm{Re}\, \mathcal{F}_k$ なので，やはり一点関数には虚部がない．

これらの問題は，本来ユークリッド形式で定義された GKP–ウィッテン関係式を Lorentzian で字句通りに使ったことが原因である．一点関数を正しく求めるには，以下の処方箋にしたがう [32]：

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_k \rangle = 2\mathcal{F}_k|_{u=0}\, \phi^{(0)}_k} \tag{10.48}$$

とくに，ホライズンからの寄与は捨てる．この処方箋の正当化については，いくつか仕事があり [34]，基本的に有限温度の場の理論の実時間形式と同じような手法を使う．また，多点関数の場合の Lorentzian 処方箋についても知られている [35]．

10.3 そのほかの AdS 時空♦

これまで AdS_5 時空や $SAdS_5$ ブラックホールを扱ってきたが，ほかにもさま

*12) たとえば，あとで求める f_k の $O(\omega)$ の解 (11.37) を式 (10.45) に代入すると簡単に確かめられる．

ざまな漸近的 AdS 時空が議論されている．ここではそれらを簡単に紹介する．AdS/CFT では（現在のところ）直接 QCD を計算できるわけではない．したがって，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論（に対応するブラックホール）などを使って解析するが，それは本来ほしい QCD の結果ではない．このため，なにかの物理量を計算したときに，結果がどの程度理論の詳細によるかを知るためにも，さまざまな理論で計算することが望ましい．

荷電 AdS ブラックホール

漸近的平坦な時空と同様に，荷電 AdS ブラックホールを考えることができる．まず，アインシュタイン–マクスウェル理論を考える：

$$\mathcal{S}=\frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-g}\left(R-2\Lambda-\frac{L^2}{4}F_{MN}^2\right) . \tag{10.49}$$

バルクにゲージ場 A_M がある場合は，AdS 境界にカレント J^μ が存在する場合に相当するので，$A_0\neq 0$ の場合は有限化学ポテンシャル／有限密度に相当する．この場合の解は，**ライスナー–ノルドストリューム AdS**（RN–AdS）**ブラックホール**と呼ばれる．

また，荷電ブラックホールの一つの一般化として，**R 荷電ブラックホール**が知られている．この場合のバルク作用は複雑なので，形式的に書くと，

$$\mathcal{L}_5=(\text{重力})+(U(1)\text{ ゲージ場 3 種})+(\text{実スカラー場 2 種}) . \tag{10.50}$$

もともとの 10 次元の立場では，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論は $AdS_5\times S^5$ 時空に対応したが，この場合は S^5 方向に角運動量を入れたことに相当する．S^5 の対称性，$SO(6)$ はランク 3 なので，3 つの独立な角運動量を与えることができる．

5 次元の立場では，コンパクト化によって，コンパクト方向の計量からゲージ場が出てくる（カルツァ–クライン・ゲージ場）*13)．S^5 方向の角運動量は，5 次元の立場ではこれらゲージ場に対する電荷である．S^5 の対称性は R 対称性に対応したので，このような電荷を R 電荷と呼ぶ．

R 荷電ブラックホールで 3 つの電荷が等しい場合は，上の RN–AdS ブラックホールに帰着する．R 電荷が 1 つの場合は，RN–AdS ブラックホールとは違う解である．これはスカラー場が存在するからである．もっとも，漸近的平坦な時空の場合，スカラー場はゼロにしかならずブラックホール解は変わらない．これはノー・ヘア定理によるものである．つまり，AdS 時空ではノー・ヘア定理は必ずしも成りたつわけではない．

一般次元の AdS ブラックホール

重力理論の立場では，簡単な一般化として一般次元の $SAdS_{p+2}$ ブラックホー

*13) 簡単な S^1 コンパクト化については，11.5 節で議論している．

ルを考えることができる．境界理論としては，$(p+1)$ 次元のコンフォーマルな理論に相当する．ただし，5.4 節のようなブレーンを経由していないので，これ以上の詳細は不明だが，$p=2,5$ の場合はそれぞれ以下の M2, M5 ブレーンとして考えることができる．

そのほかのブレーン（M ブレーン）

超弦理論ではさまざまなブレーンが登場し，それらを使った AdS/CFT 双対性も議論されている．

M ブレーンは，**M 理論**と言う 11 次元理論にあらわれるブレーンである．しかし，超弦理論と違い，M 理論の微視的な定式化はまだない．とは言え，いくつかはっきりしていることがある．

- まず，M 理論はストリングの理論ではない．ストリングが無矛盾であるためには，10 次元時空であることが要求されるからである．
- また，低エネルギーでは 11 次元の超重力理論であらわされる．ちょうど超弦理論の低エネルギー有効理論が 10 次元超重力理論だというのと同じである．D ブレーンが超重力理論の解であったように（式 (5.32) を参照），M ブレーンも超重力理論の解として議論できる．
- さらに，M 理論はストリングの理論ではないものの，超弦理論とは無関係ではない．M 理論を 1 次元コンパクト化したものは，**タイプ IIA 超弦理論**と呼ばれる超弦理論に帰着する．このため，M ブレーンと D ブレーンのあいだにも関係がある．

M ブレーンとしては，M2 ブレーンと M5 ブレーンがある．M2 ブレーンは，near-horizon 極限で $\mathrm{AdS}_4 \times S^7$ 時空に帰着する．対称性から対応するゲージ理論は，$(2+1)$ 次元のコンフォーマル理論で，R 対称性 $SO(8)$ をもつはずである．また有限温度では，シュワルツシルド $\mathrm{AdS}_4 \times S^7$ 時空に帰着する．しかし，M2 ブレーンに対応するゲージ理論が何かはまだはっきりしていない．超弦理論と違い，M 理論には微視的な定式化がないため，D ブレーンのように微視的な立場からの解析ができない．このため，超重力理論以外の手がかりがないという点もある．

さらに，AdS/CFT の予言では，熱力学量は $\varepsilon \propto N_c^{3/2}T^3$ という振るまいをする．温度依存性 T^3 は $(2+1)$ 次元のステファン–ボルツマンの法則で自然である．しかし，N_c 依存性が奇妙である．ゲージ理論の場合， D3 ブレーンのように N_c^2 が自然であるが，そうはなっていない．$N_c^{3/2}$ というベキは，M2 ブレーンが単純なゲージ理論ではなく，きわめてノントリビアルな理論だということを示唆する．M2 ブレーンに対応するゲージ理論については，完全には決着がついていないが，近年大きな進展があり，$N_c^{3/2}$ のベキについても，ある程度理解されてきている [36], [37]．

一方，M5 ブレーンは，near-horizon 極限で $AdS_7 \times S^4$ 時空に帰着する．このため対応するゲージ理論は，$(5+1)$ 次元のコンフォーマル理論で，R 対称性 $SO(5)$ をもつはずである．また有限温度では，シュワルツシルド $AdS_7 \times S^4$ 時空に帰着する．やはり，熱力学量は $\varepsilon \propto N_c^3 T^5$ と N_c 依存性が奇妙な振るまいをする．

そのほかのブレーン（D*p* ブレーン）

D3 ブレーン以外の Dp ブレーンを考えることもできる．D3 ブレーン同様に，これらは $(p+1)$ 次元超対称ゲージ理論に対応する．Dp ブレーンは，ポアンカレ対称性 $ISO(1,p)$ と R 対称性 $SO(9-p)$ をもつ．しかし，near-horizon 極限で AdS 時空には帰着しない．したがって，コンフォーマル対称性をもたない．実際，ディラトンがノントリビアルなので（5.2.4 節），AdS 時空のようなスケール対称性はない．ゲージ理論の立場では，$(p+1)$ 次元のゲージ理論では結合定数が $[g_{\rm YM}^2] = {\rm L}^{p-3}$ と次元をもつため，スケール対称性がないことに対応する．

熱力学量を計算すると，たとえばエネルギー密度は*14)

$$\varepsilon \propto (g_{\rm YM}^2 N_c)^{(p-3)/(5-p)} N_c^2 T^{2(7-p)/(5-p)} \,. \tag{10.51}$$

この場合は，温度以外に次元をもつ量 $g_{\rm YM}$ があるため，$(p+1)$ 次元のステファン–ボルツマンの法則にはならない．また，D3 ブレーンや M ブレーンとは異なり，トホーフト結合定数 λ にも依存している．

しかし，$p=1$ で $\varepsilon \propto \lambda^{-1/2} N_c^2 T^3 \propto N_c^{3/2} T^3$ となり，M2 ブレーンの振るまいと同じである．同様に，$p=4$ で $\varepsilon \propto \lambda N_c^2 T^3 \propto N_c^3 T^6$ となり，M5 ブレーンの振るまいと一致する．これらの振るまいは偶然ではない．ここでは詳細に議論しないが，D ブレーンの一部は 11 次元の M ブレーンに起源をもつからである．

$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の deformation

$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論にはさまざまな随伴表現が登場したが，たとえばこれらの場に質量をもたせるような摂動 (deformation) を加えることも可能である．このようにしてできた理論は，もとの $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論と比べて超対称性が小さい．また，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論ではスケール対称性から閉じこめが起きず，プラズマ相しか存在しなかった．しかし，このような理論はスケール対称性を保たず，QCD のようにダイナミカルな閉じこめが起こるものもある．このような理論に対応する時空はいくつか知られており，代表的なものとして Klebanov–Strassler 時空や，Polchinski–Strassler 時空などがある [22], [23]．

---

*14) 比熱は $p=5$ で発散，$p>5$ で負になるので，通常 $p<5$ を考える．

このアプローチの利点・欠点としては,

- 利点：対応する場の理論が明確.
- 欠点：重力理論や計量がしばしば複雑で解析が困難.

対応が未知のもの

deformation の立場ではゲージ理論から出発して考えるが，対照的に重力理論から出発して考える立場もある．このアプローチには少なくとも 2 つのパターンがある.

1. **重力理論として解析しやすい理論から出発する**．deformation の立場では，重力理論が複雑でしばしば手に負えないので，重力理論として自然なもの，解析しやすいものを選ぶ方法である．代表的なものに，ホログラフィック超伝導が挙げられる（13.3 節）．ホログラフィック超伝導は,
$$\mathcal{S} = \int d^{p+2}x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda - \frac{L^2}{4}F_{MN}^2 - |D_M\Psi|^2 - V(|\Psi|)\right], \tag{10.52}$$
$$D_M := \nabla_M - iqA_M \tag{10.53}$$
という系である．Ψ は複素スカラー場である.
2. **計量のもつ対称性から出発する**．代表的なものにリフシッツ時空が挙げられる [38]．これは境界理論が，これまで議論したスケール対称性にかわって
$$t \to a^z t\ , \quad \boldsymbol{x} \to a\boldsymbol{x} \tag{10.54}$$
という時間方向と空間方向で非等方のスケール対称性をもつ場合である（AdS 時空の場合は $z = 1$ に相当する）．このようなスケーリングは，12.1.4 節の動的臨界現象に関連して議論されている．この対称性に対応して,
$$\frac{ds^2}{L^2} = -r^{2z}dt^2 + r^2 d\boldsymbol{x}_p^2 + \frac{dr^2}{r^2} \tag{10.55}$$
という計量が議論されている．計量は $t \to a^z t\ , \boldsymbol{x} \to a\boldsymbol{x}, r \to r/a$ の下で不変である.

 この場合，計量から出発するので，この計量が解となる重力理論は何か，またその重力理論は超弦理論の立場として自然かがまず問題になる．さらに計量 (10.55) は $r = 0$ で時空特異点をもつ（$z \neq 1$ の場合）*15)．曲率

*15) 時空特異点と言っても，曲率テンソルで作る不変量 $R^{MNPQ}R_{MNPQ}$ などに発散がなく，潮汐力が発散するという特異点である．$R^{MNPQ}R_{MNPQ}$ などが発散するものを s.p. (scalar polynomial) 特異点，潮汐力が発散するものを p.p. (parallelly propagated) 特異点と言う．一部のブレーンも同様の特異点をもつ．実は，時空特異点にはさまざまな種類があり，完全に分類することはできない．このため，一般相対論では時空特異点を測地線不完備 (geodesically incomplete) として操作主義的に定義する．測地線不完備とは，少なくとも 1 つの測地線が有限の「固有時間」（有限アフィン・パラメータ）で終端を迎え，先には延ばせないことを言う.

が大きくなるので，(α' 補正が大きく効いて）計算する物理量が信頼できるのかといった問題がありうる．

どちらのパターンも利点・欠点としては，

- 利点：重力理論として単純なものを選べる．さまざまな重力理論を使うことが可能．
- 欠点：対応する場の理論が明確ではない．とくに重力理論と場の理論のパラメータを関係づける AdS/CFT 辞書が欠けているので，定量的な予言が難しい．

第 11 章
クォーク・グルーオン・プラズマへの応用

AdS/CFT によると，ヤン–ミルズ・プラズマのずり粘性率は，強結合で普遍的な小さな値をとる．この計算を $\mathcal{N}=4$ プラズマの場合で説明し，QGP の実験結果と比較する．

11.1 ラージ N_c プラズマの粘性率

11.1.1 $\mathcal{N}=4$ プラズマの輸送係数

前章の一般論を受けて，実際にもっとも簡単な $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論で輸送係数を計算しよう．

- おさらいしておくと，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論は，負の宇宙定数をもち，物質場がない 5 次元の重力理論に対応する（5 章）．この重力理論の解としては，温度ゼロでは AdS_5 時空，有限温度ではシュワルツシルド AdS_5 ブラックホールがある（7 章）．
- クォーク・グルーオン・プラズマへの応用を考えるため，有限温度を考える．そして，このブラックホールに摂動を加え，摂動方程式を解く．ゲージ理論の立場では，これは摂動に対応するオペレーターへの応答を計算したことに対応する．
- 摂動の種類次第で，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のさまざまな輸送係数を求めることができる．

まず，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の非自明な輸送係数は，ずり粘性率だけである．スケール不変な理論では，エネルギー・運動量テンソルがトレースレス $T^\mu_\mu=0$ になる（7.2 節）．この結果，

$$\text{体積粘性率}\quad \zeta=0\,,\quad \text{音速}\quad c_s^2:=\frac{\partial P}{\partial\varepsilon}=\frac{1}{3} \tag{11.1}$$

がただちに決まってしまう．したがって，非自明な量はずり粘性率 η だけであ

る．もちろん ζ, c_s が上記の値どおりかどうかを確かめることもでき，これらは大切な無矛盾性のチェックである．

9.3.6 節の議論から，境界時空に摂動 $h_{xy}^{(0)}$ を与えると T^{xy} への応答は

$$\langle \tau^{xy} \rangle = i\,\omega\,\eta\,h_{xy}^{(0)} \tag{11.2}$$

となるので，この応答をみることで η を決めることができる．したがって，5 次元の重力摂動 h_{xy} を考える．

運動方程式を書き下すと，$(u^2 h_{xy})$ は質量ゼロのスカラーと同じ運動方程式を満たす．したがって，10.2.1 節のスカラー場と同じように，

$$\left(u^2 h_{xy}\right) \sim h_{xy}^{(0)} \left\{1 + h_{xy}^{(1)} u^4\right\}, \quad (u \to 0) \tag{11.3}$$

と振るまう．スカラー場と同様，早く落ちる項は期待値をあらわし，AdS/CFT によれば，

$$\langle \tau^{xy} \rangle = \frac{1}{4\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} h_{xy}^{(1)} h_{xy}^{(0)} \tag{11.4}$$

と解釈される（11.4 節）．スカラー場の例と同じなので，$\langle \tau^{xy} \rangle$ のコンフォーマル次元は 4 であり，これは $(3+1)$ 次元のエネルギー運動量テンソルとして期待される振るまいである．式 (11.2) と式 (11.4) を比べ，また温度 (7.7)，エントロピー密度 (7.9) を使うと

$$h_{xy}^{(1)} = \frac{\eta}{s}\, i\,\mathfrak{w}, \qquad \mathfrak{w} := \frac{\omega}{T} \tag{11.5}$$

と書きかえることができる．

$h_{xy}^{(1)}$ を決めるには実際に運動方程式を解く必要がある（11.1.4 節）．この際注意すべき点として，

- この例では，結局質量ゼロのスカラーに帰着するので，運動方程式を解くのは簡単そうにみえるが，実はこの例ですら運動方程式 (11.17) は解けない．微分方程式が確定特異点を 3 つより多く含むためである．これはブラックホールの問題では典型的にあらわれる事情で，その結果，ブラックホールでの摂動問題には数値計算が不可欠である．

  幸いなことに，いま主に興味があるのは流体極限 $(\omega \to 0, q \to 0)$ である．したがって，運動方程式を (ω, q) で展開して，低次が解ければ十分である．この場合はしばしば運動方程式が解ける．

- また 10.2.1 節で議論したように，5 次元時空内部で境界条件を 1 つ課す必要がある．この境界条件として，ホライズンで場が吸収される一方であるという条件を課す（**"incoming-wave" 境界条件**）．ホライズンからは何ものも逃れられないので，場が吸収される一方というこの境界条件は自然である．

  実は輸送係数を計算する際，この境界条件が散逸の起源に本質的な役割

を果たす．そもそも，一般相対論は時間反転対称な系である．その一般相対論から散逸のような非可逆性が生まれるのは，この境界条件が理由である．

このようにして摂動方程式を解いたものが式 (11.38) で，

$$h_{xy}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\, i\,\mathfrak{w} + O(\omega^2, q^2)\ . \tag{11.6}$$

式 (11.5) と式 (11.6) を比べると，

$$\boxed{\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}} \tag{11.7}$$

η の値自体は，AdS/CFT 辞書 (5.42) とエントロピー密度 (7.9) を使えば求めることができる：

$$\eta = \frac{1}{16\pi G_5}\left(\frac{r_0}{L}\right)^3 = \frac{\pi}{8} N_c^2 T^3\ . \tag{11.8}$$

式 (7.8) にあるように，エントロピー密度はホライズンの単位面積 a に比例するので，η も a に比例していることに注意．11.1.3 節でみるように，この点は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論だけではなく，一般に成りたつ．

ここでは久保公式を使って η/s を求めたが，9.3.7 節でみたように η/s は分散関係からも求められる．この計算については補遺とするが（11.5 節），ここでの結果と一致することが確かめられる．

11.1.2　通常の物質の粘性

AdS/CFT の結果を通常の物質の粘性と比べてみよう．まず，AdS/CFT の予言で次元量を復活させ，$\hbar \approx 1.05 \times 10^{-34}$ J · s, $k_{\rm B} \approx 1.38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1} を使うと，

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_{\rm B}} \approx 6.1 \times 10^{-13}\ {\rm K \cdot s}\ . \tag{11.9}$$

通常の物質の例として窒素を考える．文献 [39] によると，窒素は 273.15 K (0°C)，標準大気圧 1atm (≈ 0.1MPa = 1bar) 下で，

$$\eta \approx 16.6\ \mu{\rm Pa \cdot s}\ , \quad s \approx 189\ {\rm J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}\ . \tag{11.10}$$

上の標準状態で 1 モルの理想気体は 22.4 ℓ (= 22.4 × 10^{-3}m^3) を占めるから

$$s \approx 189 \times \frac{1}{22.4 \times 10^{-3}} \approx 8.4 \times 10^3\ {\rm J \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}}\ . \tag{11.11}$$

したがって窒素の η/s は

$$\frac{\eta}{s} \approx \frac{16.6 \times 10^{-6}}{8.4 \times 10^3} \approx 2.0 \times 10^{-9}\ {\rm K \cdot s} \tag{11.12}$$

$$\approx 3.3 \times 10^3\ \frac{\hbar}{4\pi k_{\rm B}}\ . \tag{11.13}$$

すなわち，窒素の η/s は AdS/CFT の結果の 3×10^3 倍である．強結合ゲージ理論プラズマの η/s は，通常の物質と比べると著しく小さいことがわかる．

11.1.3 η/s の普遍性

η/s の普遍性について

11.1.1 節の計算は，もっとも簡単な，シュワルツシルド AdS ブラックホール，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論に対応する．しかし，すぐあとでみるように，さまざまな理論で同様の計算がされていて，既知の例では常に $\eta/s=1/(4\pi)$ が成りたっている*1)．

これらの結果から，η/s の普遍性は，強結合のラージ N_c ゲージ理論に共通した性質ではないかと考えられる．ラージ N_c ゲージ理論が QCD の良い近似になっているのであれば，クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) に対しても同様の結果が成りたつのではないかと想像される．実際 RHIC 実験によると，QGP はきわめて小さな粘性をもった流体として振るまうとされ，その値は式 (11.7) に近いと見積もられている（次節）．

この普遍性を理解するために，いくつかコメントしておく：

1. η/s は普遍性をもつが，η と s の値自体には普遍性はなく，考えている理論の詳細による．エントロピー密度は自由度を数えているので，系の自由度に依存する．また，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論はスケール不変なので，次元解析から $s\propto T^3$ となるが，系にほかのスケールがあればそれらにも依存する．たとえば有限密度では，化学ポテンシャル μ にも依存する．普遍性が意味するのは，η, s は同じ関数形をもつので，比をとることでそのような理論の詳細はちょうど打ち消しあって，基本定数のみが登場するということである．もちろん，そのかわりに多くの情報を捨ててしまうことになる．
2. これまで大ざっぱに「小さな粘性」と言ってきたが，正確には η/s が小さいことを指している．式 (9.142) でみたように，流体力学方程式には η/s の組み合わせで入ってくるので，この量に着目するのは自然である．

第 2 の点がとくに重要なのは，**QGP の粘性自体はけっして小さいわけではないからである**．$\eta\propto T^3$ であり高温のプラズマを考えているので，実は QGP の粘性自体は大きい．

結合定数の依存性も含めるため，簡単な例として $\lambda\phi^4$ 理論の tree-level を考える．各種の量の温度依存性は，次元解析から

$$\text{数密度}：n\propto T^3\,, \tag{11.14a}$$

$$\text{散乱断面積}：\sigma\propto\frac{\lambda^2}{T^2}\,, \tag{11.14b}$$

*1)　プラズマが非等方性をもつ場合，以下の普遍性の議論が成りたたないことが指摘されている [40]．

$$\text{平均自由行程}: l_{\text{mfp}} \simeq \frac{1}{n\sigma} \propto \frac{1}{\lambda^2 T}\,, \tag{11.14c}$$

$$\text{エネルギー密度}: \varepsilon \propto T^4\,, \tag{11.14d}$$

$$\text{ずり粘性率}: \eta \simeq \varepsilon l_{\text{mfp}} \propto \frac{T^3}{\lambda^2}\,. \tag{11.14e}$$

高温では多数の粒子が励起されて数密度は大きくなり，l_{mfp} も小さくなる．しかし，だからと言って，ずり粘性率が小さくなるわけではない．ずり粘性はエネルギー運動量輸送だからである．すなわち，高温では粒子の平均エネルギーは高く，かつ高温では粒子がたくさん存在するため，高温ではエネルギー輸送はむしろより効率的になる．このため，高温ではずり粘性率は大きくなる．

しかし，粘性への結合定数の依存性に注意してほしい．強結合の流体では，$\eta \propto T^3$ と言っても，弱結合よりは小さい．その意味で（同じ温度で弱結合という仮想的な場合よりも），QGP の粘性自体も小さいと言ってもいいであろう．

温度と結合定数の依存性が両方入ると混乱しかねないので，一番いいのは，ほかの物理量と組み合わせて（自然単位系で）無次元量を作ることである*2)：

$$\frac{\eta}{s} \simeq \frac{1}{\lambda^2}\,. \tag{11.15}$$

こうすると結合定数の依存性だけが残り，強結合による「小さな粘性」の意味が明らかである．また，流体方程式にはこの組み合わせで入ってくるので，この意味でも適切である．

普遍性の主な例

普遍性が成りたつ主な例としては[41]

(i) **コンフォーマルな理論**（以下，すべてゲージ理論の非閉じこめのプラズマ相での計算）

(ii) **非コンフォーマルな理論**：$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論はコンフォーマルな理論である．しかし，スケールをもった理論，非コンフォーマルな理論でも普遍性は成立する．たとえば，あらわなスケールをもった理論（D3 ブレーン以外の Dp ブレーンなど）や，QCD のようなダイナミカルなスケールが出る理論が挙げられる（Klebanov–Strassler 時空のブラックホール版など）．

(iii) **4 次元時空以外の場合**：境界理論が $(p+1)$ 次元時空の場合でも普遍性は成立する（SAdS$_{p+2}$ ブラックホール，Dp ブレーンなど）．

(iv) **有限密度の場合**：QCD の相図では温度のみならず，化学ポテンシャルも重要なパラメータである．普遍性はこのような場合でも成立する．ただし，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の場合，有限密度と言っても現実的なバリオン数化学ポテンシャルではなく，この理論がもつ大域的対称性（$U(1)_R$ 対称性）に

*2) $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論でみたように（7.2 節），エントロピー密度の結合定数への依存性は弱い．

付随した化学ポテンシャルである．また，このように大域的対称性に付随した化学ポテンシャルがある場合は，その後より一般的な設定でも証明された．

(v) **（クォークのような）基本表現を含む場合**：上記のケースではフェルミオンやスカラーがあっても随伴表現になっている場合だが，基本表現を含む場合でも成立する．これは，たとえば D3 ブレーンだけではなく，D7 ブレーンも入れることによって実現される（Karch–Katz モデルなど）．D7 ブレーンを加えたことで計量の形は変更されるが，D7 ブレーンをプローブとして加えた場合はその影響を摂動的に見積もることができる．

(vi) **時間依存する $\mathcal{N}=4$ プラズマ**：ここまでの理論は定常なプラズマをあらわしている．実験でのプラズマは急速に発展する系であり，そのようなプラズマも扱えるのが望ましい．これは重力理論では時間依存するブラックホールを考えることになる．このような場合でも，普遍性が主張されている．ただし，時間依存するブラックホールは正確な解析が難しい．

このうち，(vi) の場合以外を示すには，重力理論にさまざまなゲージ場やスカラー場を加えた理論を考える．この場合でも，摂動方程式を同様に解くことができて，同じ結果が導かれる[42]．この際に普遍性が成りたつ技術的な理由は，

1. 境界時空の座標を $x^\mu=(t,x,y,z)$ として，いま z 方向を伝搬する摂動を考えていた：$k_\mu=(\omega,0,0,q)$．すると k_μ を不変に保つ little group として，(x,y) 方向の $SO(2)$ が存在する．エネルギー運動量テンソルも重力の摂動も，この little group の変換性の下で分類することができる．結果，スカラー，ベクトル，テンソルの各モードに分けられる（9.3.7, 11.5 節）．このように分類するのは，各モードが違う変換性をもつため，各モードの運動方程式が結合しないためである．

   さて，いま考えていた摂動 h_{xy} はこの分類の下でテンソルモードである．たとえ重力理論にマクスウェル場やスカラー場があったとしても，それらはテンソルとして変換しないので，テンソルモードとは結合しない．

   一般的にこのテンソルモードの運動方程式は，質量ゼロのスカラーの形をしていることを確かめることができる．この運動方程式は一般的に解くことができて，η はホライズンの単位面積 a に比例する．
2. 一方，エントロピー密度の方も，3.2.1 節でふれたように，広いクラスのブラックホールに対して，a に比例する．
3. したがって，η/s と比をとると，a がキャンセルしあい定数だけが残り，式 (11.7) が一般に成立する．

11.1.4 摂動方程式の解き方♦

ここでは，実際にテンソルモードの運動方程式を解いて，式 (11.6) を導出す

る．$\phi := u^2 h_{xy}$ とすると，ϕ は質量ゼロのスカラーの運動方程式を満たす：

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0 \ . \tag{11.16}$$

（この導出は 11.4 節を参照.）いま $\phi = \phi_k(u)e^{-i\omega t+iqz}$ という形の摂動を考えるとすると，SAdS_5 ブラックホールでは，

$$\frac{u^3}{h}\left(\frac{h}{u^3}\phi_k'\right)' + \frac{\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 h}{\pi^2 h^2}\phi_k = 0 \ . \tag{11.17}$$

ここで

$$' := \partial_u \ , \qquad \mathfrak{w} := \frac{\omega}{T} \ , \qquad \mathfrak{q} := \frac{q}{T} \ . \tag{11.18}$$

以下，この微分方程式を解く（以下 $\mathfrak{q} = 0$）．また，境界条件として

1. ホライズン $u \to 1$ での “incoming-wave” 境界条件
2. AdS 境界 $u \to 0$ でのディリクレ条件 $\phi_k(u \to 0) = \phi_k^{(0)}$

をとる．

微分方程式を解くうえで，まず肝心なのは，微分方程式の特異点の種類とその数である．式 (11.17) の場合，確定特異点が 4 つ，

$$u = 0,\ \pm 1,\ \infty, \tag{11.19}$$

の場所にあることが簡単に確かめられる．したがって方程式の解析解は望めない．しかし，いま興味があるのは流体極限 $\omega \to 0$ で，この場合は解析的に解を求めることができる．

ホライズンでの境界条件のとり込み

ホライズンでの “incoming-wave” 境界条件をとり入れるために，まず式 (11.17) をホライズン近傍 $u \simeq 1$ で解く．ホライズン近傍では $h = 1 - u^4 \simeq 4(1-u)$ なので，

$$\phi_k'' - \frac{1}{1-u}\phi_k' + \left(\frac{\mathfrak{w}}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{(1-u)^2}\phi_k \simeq 0 \ . \tag{11.20}$$

$\phi_k \simeq (1-u)^a$ とおくと，

$$(1-u)^{a-2}\left\{a(a-1) + a + \left(\frac{\mathfrak{w}}{4\pi}\right)^2\right\} = 0 \ . \tag{11.21}$$

したがって，

$$\phi_k \propto (1-u)^{\pm i\mathfrak{w}/(4\pi)} \ , \qquad (u \to 1) \ . \tag{11.22}$$

式 (11.21) は，ϕ_k を $(1-u)$ のベキ展開で求めたとき，最低次を決める決定方程式に相当する．この作業を続けて，解を $(1-u)$ の級数解として求めること

も可能だが[*3)]，ここではその方法はとらない．

式 (11.22) は見慣れない形をしているかもしれないが，**カメ座標** (tortoise coordinates) を使うことで自然に解釈ができる．カメ座標とは，一般に計量が

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} = f(r)(-dt^2 + dr_*^2) \tag{11.23}$$

となるような座標 r_* である（計量がコンフォーマルに平坦になるような座標）．この座標系では，ラプラシアンを通常の平坦な時空のものに帰着させることができるので ($\Delta \propto -\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2$)，ホライズン近傍の物理的解釈に適している．$\mathrm{SAdS}_5$ ブラックホールは

$$ds^2 = \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \frac{h}{u^2}\left\{-dt^2 + \frac{L^4}{r_0^2}\frac{du^2}{h^2}\right\} \tag{11.24}$$

なので，カメ座標は

$$u_* = \frac{L^2}{r_0}\int \frac{du}{h} \tag{11.25}$$

$$\sim \frac{1}{4\pi T}\ln(1-u)\,, \qquad (u \to 1) \tag{11.26}$$

となる．ホライズン $u=1$ は $u_* \to -\infty$ に相当する．2.3.2 節で議論したように，座標 t ではホライズン近傍でモノがホライズンに到達するのに無限の時間がかかる．カメ座標は，この効果をホライズンが無限遠方にあるからだと解釈する．$ds^2 \propto -dt^2 + du_*^2$ なので，u_* で無限距離とならないと，無限の時間にはならないからである．

この座標を使い，時間依存性とあわせると，ホライズン近傍での解は

$$\phi \propto e^{-i\omega t}(1-u)^{\pm i\mathfrak{w}/(4\pi)} \simeq e^{-i\omega(t\mp u_*)}\,. \tag{11.27}$$

すなわち解は通常の平面波にほかならず，2 種類の解はホライズンに "incoming" か "outgoing" かという意味をもっている（複合の下の符号が "incoming"）．境界条件として "incoming-wave" を課すので，

$$\phi_k \propto (1-u)^{-i\mathfrak{w}/(4\pi)}\,, \qquad (u \to 1) \tag{11.28}$$

$$\simeq (1-u^4)^{-i\mathfrak{w}/(4\pi)}\,, \qquad (u \to 1) \tag{11.29}$$

を選ぶ．

以下で，摂動方程式を $\mathfrak{w}$-展開で解くので，比較しやすいように式 (11.29) も $\mathfrak{w}$-展開しておこう．$a^x \sim 1 + x\ln a + \frac{1}{2}x^2(\ln a)^2 + \cdots$ なので

$$\phi_k \propto 1 - \frac{i\mathfrak{w}}{4\pi}\ln(1-u^4) + \cdots\,, \qquad (u \to 1) \tag{11.30}$$

解 (11.29) 自体はホライズン近傍 $1-u \ll 1$，つまり $\ln(1-u) \gg 1$ のときに

*3) $u=1$ まわりの級数解が収束半径 1 をもつ場合．このためには，複素 u 平面上で微分方程式の特異点が収束半径内に存在しないことが必要である．

成立するが，$\mathfrak{w}$-展開は $\mathfrak{w}\ln(1-u) \ll 1$ のときに成立する．この 2 つの条件は，十分小さな $\mathfrak{w}$ で成立する．

$\mathfrak{w}$-展開

式 (11.17) をホライズン近傍で解いたが，次に $\mathfrak{w}$-展開で u の全域で解く：

$$\phi_k = F_0(u) + \mathfrak{w}F_1(u) + \cdots \tag{11.31}$$

とすると，式 (11.17) より

$$\left(\frac{h}{u^3}F_i'\right)' = 0 \ . \tag{11.32}$$

ここで $i = 0, 1$ である．式 (11.32) の解は，

$$F_i = A_i + B_i \ln(1-u^4) \tag{11.33}$$

（A_i, B_i は積分定数）．したがって，

$$\phi_k = (A_0 + \mathfrak{w}A_1) + (B_0 + \mathfrak{w}B_1)\ln(1-u^4) + O(\mathfrak{w}^2) \ . \tag{11.34}$$

最後に境界条件を課す．AdS 境界 $u \to 0$ での境界条件 $\phi_k(u \to 0) = \phi_k^{(0)}$ より，

$$A_0 + \mathfrak{w}A_1 = \phi_k^{(0)} \ . \tag{11.35}$$

ホライズンでの境界条件は式 (11.30) に帰着したので，

$$B_0 + \mathfrak{w}B_1 = -\frac{i\,\mathfrak{w}}{4\pi}\phi_k^{(0)} \ . \tag{11.36}$$

以上より，

$$\phi_k = \phi_k^{(0)}\left\{1 - \frac{i\,\mathfrak{w}}{4\pi}\ln(1-u^4) + O(\mathfrak{w}^2)\right\} \ , \quad (0 \le u \le 1) \ . \tag{11.37}$$

$$\sim \phi_k^{(0)}\left\{1 + \frac{1}{4\pi}i\,\mathfrak{w}u^4 + \cdots\right\} \ , \qquad (u \to 0) \ . \tag{11.38}$$

$O(\mathfrak{w})$ に出てきた係数 $1/(4\pi)$ がそのまま η/s の値となって出てくる．

11.2 QGP 実験との比較

11.2.1 実験で粘性をどうみるか？

実験的には QGP のずり粘性は，**楕円フロー** (elliptic flow) と呼ばれる現象を通して測定される．重イオン実験では原子核どうしを衝突させるが，楕円フローは原子核が正面衝突するときではなく，インパクト・パラメータがノンゼロの off-axis collision 時に起こる現象である（図 11.1）．このとき，図で影をつけた「アーモンド」型の部分で原子核は重なる．強い相互作用は短距離力なので，プラズマの生成はこの影の部分で起こる．

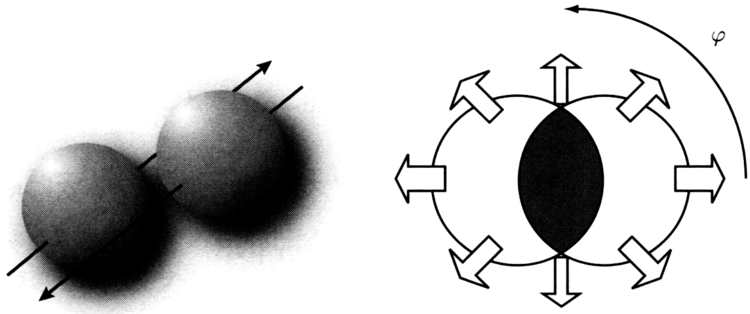


図 11.1　楕円フロー．右図の影の部分は，原子核が重なる部分をあらわす．矢印の太さは，生成粒子数をあらわす．

さて，この影の中心付近で生成された粒子に着目し，この粒子がアーモンド型の部分から外に出る様子を考えよう：

- 粒子が初期にアーモンド型部分の長軸方向への運動量をもっている場合，短軸方向と比べて移動距離が長いので，ほかの粒子と衝突する確率が大きくなる．このため，散乱により終状態の運動量方向は比較的一様になる．
- 一方，短軸方向への運動量をもっている場合，衝突の頻度が少ないので，より初期状態の運動量方向を保存すると考えられる．

したがって，生成粒子全体でみた場合，粒子分布には非一様性が出て，短軸方向により多くの粒子が観測されるはずである．注意すべきはこの非一様性は，粒子が相互作用する結果として起こる効果，つまり粘性の効果だという点である．自由ガスの場合はこのような非一様な分布にはならない．

この様子をあらわすために，生成粒子数 N をテイラー展開する：

$$\frac{dN}{d\varphi} = N\left\{1 + 2v_2\cos(2\varphi) + \cdots\right\} . \tag{11.39}$$

φ は短軸方向からの角度をあらわし，係数 v_2 のことも楕円フローと言う．

図 11.2 は，実験結果と流体力学からの解析結果を示した図である．縦軸が v_2 をあらわすので，これがゼロではないほど，相互作用の効果が大きいということを示す．流体力学からの結果は，η/s の違いによって 4 つのカーブがプロットされている．たしかに，強結合極限である完全流体の場合に v_2 がもっとも大きくなることがわかる．これらのグラフと実験結果を比較すると，重イオン実験の結果は粘性が小さい流体を示唆し，

$$\eta/s \approx 0.1 , \qquad \textit{cf.}\ \text{AdS/CFT:}\ \ \eta/s = 1/(4\pi) \approx 0.08 , \tag{11.40}$$

と見積もることができる．

このような解析は，流体方程式を使い流体の数値シミュレーションをしている．その際，ずり粘性率などの輸送係数をいろいろと変え，実験結果とあう輸

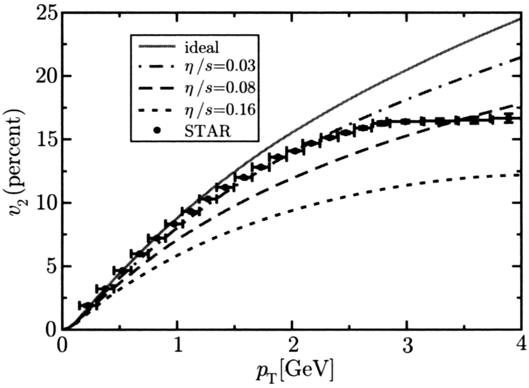


図 11.2　RHIC 実験結果と流体シミュレーションとの比較[43]．横軸は transverse 運動量（ビーム軸に垂直方向の運動量成分），縦軸は楕円フロー v_2．実験結果をあらわす "STAR" のデータと，ずり粘性を変化させておこなった流体シミュレーションの結果と比較している．

送係数の値を決めている．しかし，QGP が複雑な時間発展することを反映して，QGP のシミュレーションは流体力学だけでは閉じない．以下のような不定性がある．

- まず，流体としての初期条件を与える必要がある（速度場など）．これは，流体として近似できる以前の，系のダイナミクス次第である．このダイナミクスがよくわからない場合は，この初期条件もいろいろ変えてみる必要がある．
- また，QGP は膨張して最終的にハドロン化するので，ハドロン化も考慮に入れなければいけないが，このプロセスは十分理解されているわけではない．
- η を決めるには少なくとも $(2+1)$ 次元のシミュレーションが必要なので，低次元と比べて計算コストがかかり，近年までできなかった．
- 通常の流体力学には実は物理的ではない不安定性があり，粘性流体のシミュレーションは不可能である．この不安定性を除くことはできるが，そのためには輸送係数を増やす必要があり，結果はそれらの輸送係数の値にも依存してしまう．したがって，図 11.2 のシミュレーションも，通常の流体力学のシミュレーションではない．これらの点については 11.3.2 節で簡単に議論する．

11.2.2　格子数値計算との比較

上でみた数値計算は，実験と比較することで現象論的に粘性を決めている．一方，原理的には QCD を使って輸送係数を決めることができるはずである．つまり，QCD に対して久保公式を評価すれば，ミクロな立場から輸送係数を決

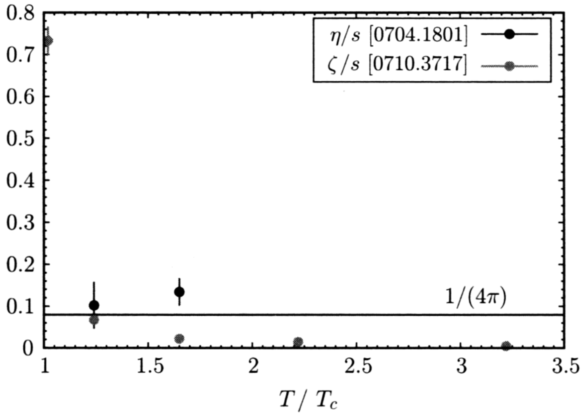


図 11.3 格子ゲージ理論を使った η/s [44]．純粋な $SU(3)$ ゲージ理論についての結果である．水平線が AdS/CFT の値．図には ζ の結果も描かれている．(国際会議 NFQCD2008 スライドより．)

めることができる．もちろん，強結合の場合そのような計算は解析的には困難であるが，格子数値計算を使っておこなわれるようになってきており，やはり式 (11.7) にきわめて近いようである [44]（図 11.3．初期の仕事については，文献 [45].）このアプローチの利点・欠点は，

- 利点：上記のような，QGP の複雑な時間発展に基づく不定性がない．重イオン実験でみえているのが，小さな粘性かどうかはともかく，強結合ゲージ理論が小さな粘性をもっていること自体ははっきりする．
- 欠点：この計算自体は，実は一部 AdS/CFT の結果を使っているので，完全に AdS/CFT と独立した結果ではない．

この例は,「純粋な」$SU(3)$ ゲージ理論に対する結果だということにも注意してほしい．AdS/CFT の結果は，超対称ゲージ理論についての結果である．しかし，文献 [44] の結果は，超対称性がなく，かつラージ N_c 極限でないゲージ理論に対しても，普遍性はいい近似で成りたっていることを示唆する．

11.2.3 超対称ゲージ理論を使う根拠は？

AdS/CFT はさまざまなゲージ理論に応用されているが，超対称ゲージ理論がほとんどである．QCD に対応する重力理論がまだみつかっていないからである．そこで，実際の計算には $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論をはじめとする超対称ゲージ理論を使うことになる．このため「超対称ゲージ理論が現実の QCD となんの関わりがあるのか？」という疑問を抱くかもしれない．少なくとも，2 つの答えが考えられる．

第一の答えは「普遍性」である．ここで言う普遍性とは，ゲージ理論に共通した振るまいを示す観測量のことである．もしこのような観測量をみつけるこ

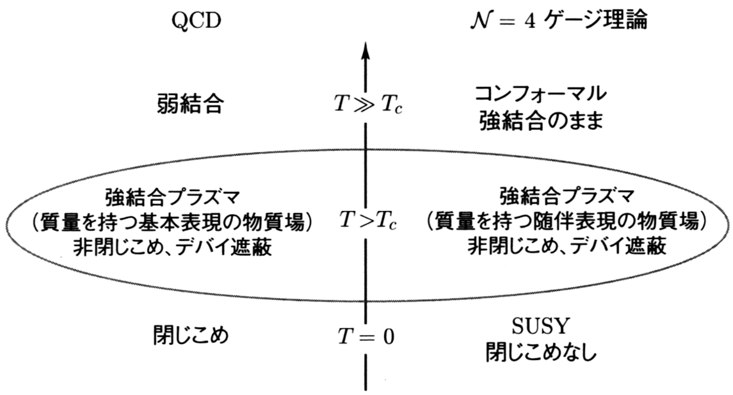


図 11.4 QCD と $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論をいくつかの温度領域で比較したもの.

とができて計算できれば，その値は QCD にも適用できると考えられる．η/s はその一例である．

ただし，この答えは限られた観測量にしか適用できない．精密性は失われるが，第二の答えとしては「特定の場合には，QCD は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論で十分近似できるかもしれない」というものである．念のため断っておくが，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論は QCD といつも似ていると言っているわけではない．この点を明らかにするために，温度を変えながら 2 つの理論を比べてみよう（図 11.4）．

一般にこの 2 つの理論は大きく違っている．高温では QCD は弱結合になるが，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論はスケール不変なのである温度で強結合なら強結合のままである．ゼロ温度でも 2 つの理論は違っている．QCD では閉じこめが起こるが，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論は超対称性から閉じこめは起こらない．

しかし，中間の温度領域では，どちらの理論も強結合プラズマで，どちらの理論でも非閉じこめやデバイ遮蔽といった振るまいがある．QCD と比べて，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論には「余分な」随伴表現の物質場が登場していた．しかし，有限温度では虚時間方向の境界条件によって随伴フェルミオンは温度程度の質量をもつ．また随伴スカラーも 1 ループの効果で質量をもつ．このため，有限温度では超対称性は壊れる*4)．したがって，有限温度の $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論は純粋なヤン–ミルズ理論に近いものになっていると予想される．**この中間の温度領域こそ，超対称ゲージ理論が QCD に近いと期待される領域である．**

たとえば，音速を比べてみよう．スケール不変な理論では，エネルギー密度と圧力は $P = 3\varepsilon$ の関係があるので（7.2 節），音速 c_s は

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{1}{3} \tag{11.41}$$

*4) 有限温度でも「超対称ゲージ理論」といった言葉を使うが，これはゼロ温度で超対称性をもつゲージ理論という意味である．

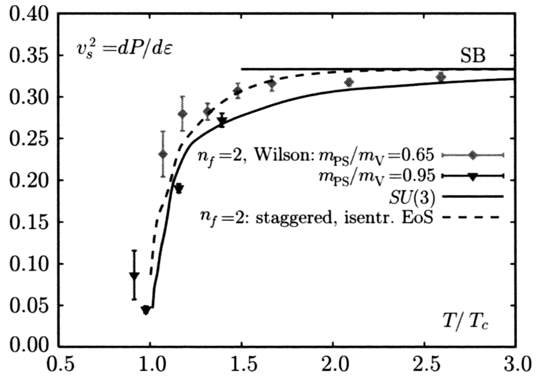


図 11.5 格子ゲージ理論を使った音速[46]．違ったフェルミオン作用や，質量を変えた場合など複数のグループの結果を重ね合わせたもの．いずれも傾向は似ている．SB はスケール不変な値 1/3 をあらわす．

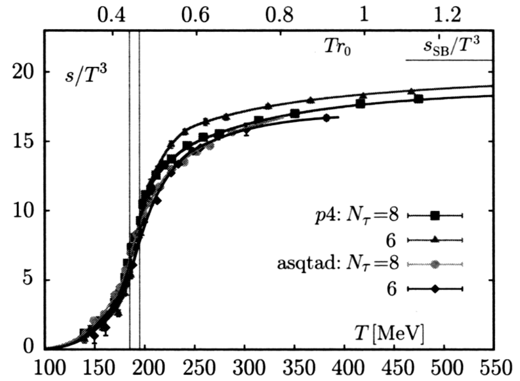


図 11.6 格子ゲージ理論を使ったエントロピー密度[47]．SB はコンフォーマルな値をあらわす．

になる．格子数値計算によると（図 11.5），QCD の音速は転移温度 T_c 付近では $1/\sqrt{3}$ から大きく隔たっているが，$T > 2T_c$ あたりから急速に $1/\sqrt{3}$ に近づくようである．したがって，この温度領域では $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論がよい近似になっていると考えられる．

格子数値計算による結果として，エントロピー密度の振るまいもみておこう．以前，$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論のエントロピー密度は，AdS/CFT によると強結合で弱結合の 3/4 と予言していることをみた（7.2 節）．似たような傾向は格子数値計算でもみられている（図 11.6）．音速同様，QCD の転移温度近くで $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論とは比べるべきではないことに注意する．エントロピー密度の比例係数は，強結合で弱結合より少し小さくなっている*5)．

*5) この減少は，AdS/CFT の 3/4 ではないようだが，(1) 両者は理論が違う，(2) また AdS/CFT の結果は強結合極限である，などの要素があるので比較はより慎重におこなう必要がある．

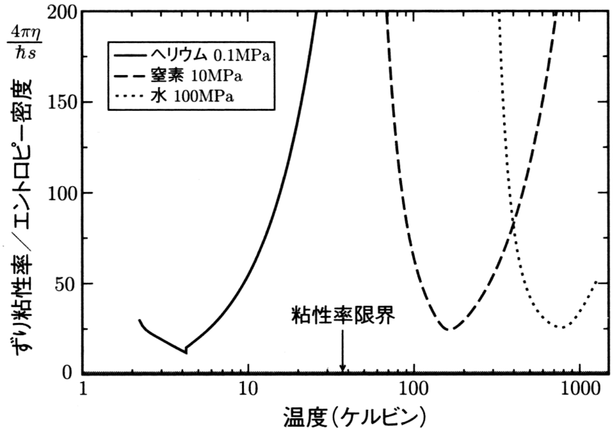


図 11.7　いくつかの流体についての η/s [48]．横軸にほとんど重なっているグレーの線が，AdS/CFT の値．

11.3　関連する話題

11.3.1　ずり粘性の限界予想

これまで考えてきたプラズマは，ヤン–ミルズ・プラズマである．しかし，いかなる流体も一般に

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{\hbar}{4\pi k_{\mathrm{B}}} \tag{11.42}$$

という関係を満たすという予想がある [48]．図 11.7 はいくつかの流体について，η/s をえがいたものである．これからわかるように，これらの流体はたしかにこの関係を満たしている．

実際，このような限界の存在は簡単な議論からもわかる．ずり粘性率とエントロピー密度は，一般に次のようになる：

$$\eta \simeq \rho \bar{v}\, l_{\mathrm{mfp}}, \qquad s \simeq \frac{\rho}{m} k_{\mathrm{B}} \tag{11.43}$$

（ρ：質量密度，$\bar{v}$：流体を構成する粒子の平均速度，l_{mfp}：平均自由行程，m：粒子の質量）．すると粘性率限界 $\eta/s \gtrsim \hbar/k_{\mathrm{B}}$ は，$l_{\mathrm{mfp}} \gtrsim \hbar/(m\bar{v})$，つまり平均自由行程が粒子のド・ブローイ波長より長くなければいけないという制限である．ふつうの流体は準粒子描像が成りたつので，たしかにこうなっているだろう．

勘違いしやすいのが，超流動の場合である．液体ヘリウムは超流動を起こし，その粘性はゼロだと思うかもしれない．たしかに，細い毛細管などに液体ヘリウムを通して粘性を測ればそうなる．しかし，液体ヘリウムのなかで物体を動かす，たとえば円盤を回転させると，円盤が引きずられ有限の粘性が得られる．これは，液体ヘリウムに有限の粘性をもつ成分があることを示している．

二流体理論によると，液体ヘリウムは常流動成分と超流動成分からできてい

る．常流動成分は有限の粘性をもつので，全体として液体ヘリウムの粘性はゼロにはならない（図 11.7）．液体ヘリウムのなかで物体を動かすと有限の粘性が得られるのは，この常流動成分による摩擦のせいである．超流動成分は凝縮を起こすが，常流動成分は温度によるゆらぎをあらわし，有限温度では常に常流動成分がある．この常流動成分に対しては，ふつうの準粒子描像が成りたつ．

とは言え，通常の流体の場合にもこの限界が本当に成立するかどうかについては，きちんとした物性物理学からの研究が望まれる．

11.3.2 拡散問題ふたたび，流体力学への応用♦

さきにブラックホールへの摂動を解いた際，厳密には解けなかったので低エネルギー極限で解いた．しかし，式 (11.6) をみればわかるように，$h_{xy}^{(1)}$ に対して $O(\omega^2, q^2)$ の補正があるはずである．これは $T^{\mu\nu}$ に対する補正のはずだが，場の理論側でどう解釈されるのだろうか？

場の理論的にみた場合，流体力学は有効理論の低次にほかならない．流体力学には有効理論の意味での補正が加わるはずである．このような補正を加えた理論を，**因果的流体力学**，**二次流体力学** (second-order hydrodynamics) などと呼び，その代表的な理論に **Israel–Stewart 理論**がある [49]~[51]．これらの理論については，QGP の研究でも盛んに議論されている．

これらの理論では，有効理論の高次の項から新しいパラメータ，新しい輸送係数が出てくる．しかし，上記の理論は流体力学同様，枠組みにすぎないので，それらのパラメータを決めることはできない．しかし，AdS/CFT でさきほど無視した $O(\omega^2, q^2)$ の補正をきちんと計算することができれば，それらの新しい輸送係数を決めることができる [52], [53]．AdS/CFT で得られた結果は，数カ月もしないうちに QGP の流体シミュレーションで使われた．

拡散問題の場合

因果的流体力学，二次流体力学の物理的な意味を考えるために，簡単な拡散方程式に戻って考えてみよう．拡散方程式は以下のような解 (9.67) をもっていた：

$$\rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) . \tag{11.44}$$

指数減少とは言え，解は全空間（光円錐の外 $x > ct$ でも）で $\rho \neq 0$ である．**これは無限の伝搬速度を意味し，因果律と矛盾する．**

数学的には，拡散方程式は**放物型**の微分方程式である（図 11.8）．つまり，時間には 1 次微分に対し，空間には 2 次微分になっている．このような非対称性は，時間非対称である拡散を起こすのに本質的だが，因果律を満たさないことも意味する．

問題はどこにあるのだろう？　拡散方程式は，保存則と構成方程式（フィッ

放物型（parabolic）：	$-\partial_0\rho + D\partial_i^2\rho = 0$	拡散方程式
双曲型（hyperbolic）：	$-\partial_0^2\phi + \partial_i^2\phi = 0$	波動方程式
楕円型（elliptic）：	$\partial_i^2\phi = 0$	ラプラス方程式

図 11.8 微分方程式の分類と物理であらわれる代表的な方程式.

クの法則）を組みあわせて得られたものである．保存則と違い，フィックの法則は現象論的に導入された式なので，問題はフィックの法則にあるはずである：

$$J_i = -D\partial_i\rho \ . \tag{11.45}$$

時刻 $t=0$ で電荷勾配がゼロ $\partial_i\rho = 0$ になったとしよう．すると，フィックの法則 (11.45) は $J_i(t \geq 0) = 0$，つまりカレントがただちに全空間で消えることを意味する．しかし，これは物理的に不自然である．実際には，カレントはある有限の時間で減衰すべきである．そこで，この法則を以下のように修正する：

$$\tau_J\partial_0 J_i + J_i = -D\partial_i\rho \ . \tag{11.46}$$

最初の項が新しく加えた項で，τ_J は新しい輸送係数である．$\tau_J = 0$ のときは，もとのフィックの法則に帰着する．式 (11.46) は，カレントが指数関数的に減少する $J_i(t \geq 0) = J_i(0)e^{-t/\tau_J}$ という解をもつ．つまり，τ_J はカレントについての緩和時間という意味をもつ*6)．

修正した構成方程式 (11.46) と保存則を組み合わせると，今度は**電信方程式** (telegrapher's equation) が出てくる：

$$\tau_J\partial_0^2\rho + \partial_0\rho - D\partial_i^2\rho = 0 \ . \tag{11.47}$$

電信方程式は，**双曲型**の方程式である．第 1 項と第 2 項を比べると，第 1 項は時間について 2 次微分なので，激しい時間発展時に重要になることがわかる．

D と τ_J で速度の次元をもった量を作ることができる：

$$v_{\text{front}}^2 := D/\tau_J \ . \tag{11.48}$$

これは信号伝達の典型的な速度をあらわし，$v_{\text{front}} < c$ であれば因果律に抵触しない．因果的流体力学と言う呼び名は，このような事情から来ている．運動量空間では式 (11.47) は

$$-\tau_J\omega^2 - i\omega + Dq^2 = 0 \tag{11.49}$$

となり，流体力学的モードに対して分散関係は

$$\omega = -iDq^2 - iD^2\tau_J q^4 + O(q^6) \ . \tag{11.50}$$

*6) 何に対する緩和時間か注意しておく必要がある．たとえば，電荷密度の緩和時間は $\tau_\rho \simeq 1/(Dq^2)$ である．ここで議論しているのは，カレントの緩和時間 τ_J である．

第 1 項はすでにみた分散関係 (9.66) であり，第 2 項が補正項である．

我々がこれまでやってきたことは，有効理論の言葉では微分展開の高次にほかならず，τ_J は展開に伴う新たな輸送係数である．その意味では，もとの拡散方程式はカレントの緩和がきわめて速やかに起き，$\tau_J = 0$ と近似できる場合をあらわす．つまり，タイムスケール τ が $\tau \gg \tau_J$ の状況をあらわしている．

このことから，高エネルギー・短波長では，ここでは考えてこなかった $O(\omega^3, q^3)$ の項がさらに効くと考えられる．したがって，実際に因果律を満たしているかどうかは式 (11.48) だけでは決定できず，微分展開の全次数を考える必要がある．式 (11.48) は目安にすぎない．とすると，ここでやった微分展開の高次を考えることに，はたして意義があるのか訝しむかもしれない．実は，拡散方程式のような「一次」流体力学には，ほかにもさまざまな問題があり，それらの問題を解決するうえで有用である（後述）．

流体力学の場合

拡散問題を離れて，流体力学の場合について簡単に議論しておくと，基礎方程式は，やはり保存則 (9.83) と構成方程式 (9.84), (9.103) だった．そして，構成方程式はやはり現象論的な方程式として課せられたものである．有効理論の高次は，構成方程式に微分展開の高次項を加えることに相当する．その結果，式 (9.103) に $O(\omega^2, q^2)$ の補正があらわれる．たとえば式 (9.130) は，二次流体力学では以下のように変更される（$p \geq 3$ の場合）[52]：

$$\delta\langle\tau^{xy}\rangle = \left[i\omega\eta - \eta\tau_\pi\omega^2 + \frac{\kappa}{2}\{(p-2)\omega^2 + q^2\}\right] h_{xy}^{(0)} \,. \tag{11.51}$$

ここで τ_π, κ が二次流体力学に出てくる新しい輸送係数（のうちの 2 つ）である．τ_π は，カレントの τ_J 同様，運動量流束の緩和時間という意味をもつ．バルクの立場では，これが $h_{xy}^{(1)}$ に対する $O(\omega^2, q^2)$ の補正にほかならない．

また，AdS/CFT は単にこれらの輸送係数を決めるだけではない．AdS/CFT の結果と，上記のような枠組みは無矛盾になっていなければいけない．実は，二次流体力学の研究には長い歴史があり，非相対論的な場合も含めると 100 年以上議論されている．しかし，いまだに枠組みは一つに収束していない．つまり，Israel–Stewart 理論も決定打というわけではない．したがって，**AdS/CFT の結果を矛盾なく解釈できるか考えることで，それらの枠組みが妥当なものかどうか判断できる**．事実，AdS/CFT の結果を矛盾なく解釈するために，Israel–Stewart 理論では欠けていた高次項が存在することが指摘された．それに伴って，これまで議論されたことのなかった新たな輸送係数が生じた．たとえば式 (11.51) の κ がその一例である．

さきに，一次流体力学には因果律の問題以外にもさまざまな問題があると述べた．これは以下のような問題であり，二次流体力学はこれらの問題を解決するうえで有用である：

1. **物理的ではない不安定性**：通常の一次流体力学には，実は物理的ではない不安定性がある[54],[55]．二次流体力学には，このような問題はない（線形摂動の場合）．実用的な観点からは，この問題は粘性を導入した途端に数値シミュレーションが破綻することを意味する．一次流体力学のシミュレーションは存在しない．このため，AdS/CFT で得られた二次流体力学についての結果が，すみやかに QGP の流体シミュレーションで活用された．
2. **フレームのとりかえについての問題**：9.3.5 節でランダウ–リフシッツ・フレームとエッカルト・フレームについて議論した．本来はこれらのフレームは，どのカレントに着目した流体静止系かという違いにすぎない．しかし，実際には一次流体力学の枠組みでは，フレームどうしの変換は不可能である．微分展開の 2 次項まで含めておかなければ，フレームの変換の下での共変性は保証できない[50]．これらのフレームでの一次流体力学が物理的に同等でないことは，不安定性の解析からも明らかである[54],[55]．しばしば，エッカルト・フレームの方が，不安定性の点でより問題が深刻だからである．

11.3.3 ラージ N_c 極限からの補正♦

ここまでラージ N_c 極限での結果をみてきたが，AdS/CFT で言う強結合と QGP で言う強結合は意味あいが違っているということを注意しておく必要がある．つまり，

1. QGP: $\lambda \fallingdotseq O(10)$, $N_c = 3$ ($g_{\rm YM} = O(1)$).
2. AdS/CFT: $\lambda \to \infty$, $N_c \to \infty$ ($g_{\rm YM} \to 0$).

強結合の意味が違うからといって，AdS/CFT の結果が役にたたないというわけではない．要は，1 のような状況を 2 のように展開したときに，補正が小さいかどうかである．

いまの理論には独立なパラメータとして λ と N_c の 2 つがあるので，補正の種類も 2 種類ある．それぞれの補正について，どの程度知られているかを簡単に議論しておく．

$1/\lambda$ 補正

$1/\lambda$ 補正は，重力理論の立場では α' 補正に相当する（5.4.4 節）．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の場合，対応する超重力理論の α' 補正は，

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x\sqrt{-g}\left\{R + l_s^6 O(R^4) + \cdots\right\} \tag{11.52}$$

という形をしている．AdS/CFT 辞書から l_s^6 は $O(\lambda^{-3/2})$ の補正を意味している．このような補正をとり入れた η/s は[56],[57]，

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{120}{8}\zeta(3)\frac{1}{\lambda^{3/2}} + \cdots\right) . \tag{11.53}$$

$\zeta(3) = 1.20206\ldots$ である．この補正の大きさを見積もるために，QGP のときによく使われる $\alpha_{\mathrm{QCD}} := g_{\mathrm{YM}}^2/(4\pi) = 1/2$ ($\lambda = 6\pi$) を使う．すると η/s は 22%の増加になる．

$\eta/s = 1/(4\pi)$ は多くのブラックホールについて成立するにもかかわらず，このような補正を入れるとなぜ $1/(4\pi)$ ではないのだろうか？

- 第一に，3.2.1 節では，**重力作用がアインシュタイン–ヒルベルト作用で書かれる限り** $S_{\mathrm{BH}} = A/4$ が成りたつと書いた．しかし，式 (11.52) はこの仮定を満たさない．このため，エントロピーは $A/4$ ではない．
- 第二に，テンソルモードを計算したとき，運動方程式が質量ゼロのスカラーの形をしていることを使っていた．しかし，式 (11.52) のように $1/\lambda$ 補正を含めると，テンソルモードに対して高次の微分を含むので，運動方程式はもはや質量ゼロのスカラーの形にはなりえない．

この 2 つの効果をあわせて，上のような補正が出てくる．

また，η/s が増加していることにも注意しよう．これは自然な振るまいである．一般にずり粘性率は平均自由行程に比例する．相互作用が弱くなると，平均自由行程は増大する．このため，弱結合でずり粘性率は増加する．

ただこのような補正については，もはや普遍性が成りたたない．つまり式 (11.53) のような結果は，理論次第である．と言うのは，α' 補正の形 (11.52) は，対応するゲージ理論によって変わるからである．ほかの理論でも計算できればいいのだが，α' 補正に寄与する項は膨大で，ほかの理論では現在でもすべての項が求まっているわけではない．このため，ほかの理論で計算することは現時点ではできていない．したがって， 22%という結果がどれほどもっともらしいのかははっきりしない．そこで，対応するゲージ理論は何かという問題はいったん棚上げにして，計算しやすい一般的な α' 補正を仮定して，$1/\lambda$ 補正を調べるというアプローチもとられている[58]．

$1/N_c$ 補正

$1/N_c$ 補正は，重力理論の立場では量子重力補正に相当する．超弦理論は量子重力理論だが，重力の量子効果を計算するのは一般に容易ではない．このため，$1/N_c$ 補正の計算も難しく，これまでに見積もられていない．

ただし，$1/N_c$ 補正は別の興味でしばしば調べられるようになってきている．そもそもラージ N_c 極限では，けっしてみえない現象がある．たとえば，低次元ではゆらぎの効果が大きくなって自発的対称性の破れは起こらないことが知られている（12.1.4, 13.3 節参照）．しかし，ラージ N_c 極限ではゆらぎが抑えられて，低次元でも自発的対称性の破れが起こってしまう．このようなラージ

N_c 極限ではみえない現象が，$1/N_c$ 補正をとり入れることで AdS/CFT でもみえるかという仕事がなされている [59]~[62]．もちろん，定量的に正確な計算は難しいが，これらの場合は現象の定性的な面に主な興味があるので，正確な計算ではないものの，ある程度議論されている．

まとめると，$1/\lambda$ 補正の場合，特定の理論では補正が小さいようだが，一般にそうなのかはわかっていない．一方，$1/N_c$ 補正の場合まだ評価されていない．したがって，AdS/CFT の「強結合」が現実の QGP の「強結合」に近いかどうかは，残念ながらはっきりしていないのが現状である．

11.4 補遺：テンソルモードの作用導出の詳細♦

ここでは，実際に重力場の作用から出発して，テンソルモードについての作用を導出し，境界作用を求める．そこから重力の場合の場とオペレーターの対応 (11.4) が導かれる．

7.4 節でみたように，重力場の作用は形式的に 3 つの部分，つまりバルク作用 $\mathcal{S}_{\text{bulk}}$，ギボンズ–ホーキング作用 $\mathcal{S}_{\text{GH}}$，相殺作用 $\mathcal{S}_{\text{CT}}$ に分けられる*7)：

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{bulk}} + \mathcal{S}_{\text{GH}} + \mathcal{S}_{\text{CT}} \ . \tag{11.54}$$

以下，それぞれの項をテンソルモードについて評価する．座標系は式 (7.40) を使う．また，

$$h_{xy}(t, \boldsymbol{x}, u) = \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \frac{\phi(t, \boldsymbol{x}, u)}{u^2} \tag{11.55}$$

とし，境界時空 $x^\mu = (t, \boldsymbol{x}) = (t, x, y, z)$ に対して，フーリエ変換をする：

$$\phi(t, \boldsymbol{x}, u) = \int (dk)\, e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \phi_k(u) \ , \quad (dk) := \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ . \tag{11.56}$$

バルク作用

バルク作用は，通常のアインシュタイン–ヒルベルト作用で，

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}} = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) = \frac{r_0^4}{16\pi G_5 L^5} \hat{\mathcal{S}}_{\text{bulk}} \ , \tag{11.57}$$

$$2\Lambda = -\frac{p(p+1)}{L^2} \ . \tag{11.58}$$

$\hat{\mathcal{S}}_{\text{bulk}}$ の前の因子は，ほかでも共通することが簡単に確かめられるので，以後 $r_0 = L = 16\pi G_5 = 1$ とおいて計算を進める．テンソルモードの摂動に対し，

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}} \sim \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_2 \ . \tag{11.59}$$

ここで，“∼” は線形化すなわち $O(\phi^2)$ までとったことを示し，

*7) 7.4 節ではユークリッド化した作用を考えたが，ここでは Lorentzian の作用を考える．

$$\mathcal{S}_0 = -\int_0^1 du\, \frac{8V_4}{u^5}\ , \tag{11.60}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 = \int_0^1 du\, \Bigg[&\frac{h}{u^3}\left(\frac{3}{2}\phi'_{-k}\cdot\phi'_k + 2\phi_{-k}\cdot\phi''_k\right) - \frac{8}{u^4}\phi_{-k}\cdot\phi'_k \\ &+ \left(\frac{\mathfrak{w}^2-\mathfrak{q}^2 h}{2u^3 h} + \frac{4}{u^5}\right)\phi_{-k}\cdot\phi_k\Bigg]\end{aligned} \tag{11.61}$$

を示せる*8). V_4 は $(t,\boldsymbol{x})$ 方向の「体積」，また

$$f_{-k}\cdot g_k := \int (dk)\, f_{-k} g_k\ , \quad {}' := \partial_u\ , \quad \mathfrak{w} := \frac{\omega}{T}\ , \quad \mathfrak{q} := \frac{q}{T}\ .$$

通常のスカラー場の作用と違い，作用に ϕ'' の項が含まれていることに注意.

一般に

$$\mathcal{S} = \int du\, \mathcal{L}(\phi, \phi', \phi'') \tag{11.62}$$

という形の作用に対し，作用の変分は

$$\delta\mathcal{S} = \int du \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\right)\delta\phi + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'}\right)\delta\phi' + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi''}\right)\delta\phi'' \tag{11.63}$$

$$\begin{aligned}&= \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi''}\right)'\right\}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi''}\delta\phi'\Bigg|_{\mathrm{bdy}} \\ &\quad + \int du \left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi''}\right)'' - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'}\right)' + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\right\}\delta\phi\end{aligned} \tag{11.64}$$

となる．式 (11.64) 2 行目は運動方程式であり，いまの場合式 (11.61) を使うと質量ゼロのスカラーの運動方程式に帰着することを確かめることができる：

$$\frac{u^3}{h}\left(\frac{h}{u^3}\phi'_k\right)' + \frac{\mathfrak{w}^2-\mathfrak{q}^2 h}{\pi^2 h^2}\phi_k = 0\ . \tag{11.65}$$

さて，線形化された作用は

$$2\mathcal{S} \sim \int du \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\right)\phi + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'}\right)\phi' + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi''}\right)\phi'' \tag{11.66}$$

と書けるので，式 (11.64) と同じようにして on-shell 作用は

$$2\underline{\mathcal{S}} \sim \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi''}\right)'\right\}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi''}\phi'\Bigg|_{\mathrm{bdy}} \tag{11.67}$$

となる*9). したがって式 (11.61) を使えば，

$$\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{bulk}} \xrightarrow{u\to 0} V_4\left(-\frac{2}{u^4}+2\right) + \left(\frac{1}{u^4}-1\right)\phi_{-k}\cdot\phi_k - \frac{3}{2u^3}\phi_{-k}\cdot\phi'_k\Bigg|_{u=0}\ . \tag{11.68}$$

*8)　この導出は解析的にもできるが *Mathematica* を使ってもよい.

*9)　簡単のため，以下では on-shell 作用であっても $\underline{\mathcal{S}}$ ではなく $\mathcal{S}$ と書くことにする.

ギボンズ–ホーキング作用

式 (11.61) からもわかるように，重力作用の場合，通常の作用とは違い場の 2 階微分の項 ϕ'' が登場する．したがって，作用の変分をとると，AdS 境界で $\delta\phi$ に比例した項だけではなく $\delta\phi'$ に比例した項も出てくる（式 (11.64) 1 行目の最後の項）．ディリクレ条件 $\delta\phi|_{\rm bdy}=0$ で問題を解く場合，$\delta\phi'|_{\rm bdy}$ の寄与を消す必要がある．このためにつけ加える表面項がギボンズ–ホーキング作用である：

$$\mathcal{S}_{\rm GH}=\frac{2}{16\pi G_{p+2}}\int d^{p+1}x\,\sqrt{-\gamma}\,K\ . \tag{11.69}$$

記号の定義は 7.4 節を参照．SAdS$_5$ ブラックホールに対しては，$N^{-1}=uh^{1/2}$，$\sqrt{-\gamma}=u^{-4}h^{1/2}(1-\phi^2)^{1/2}$ なので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm GH}&=2\sqrt{-\gamma}K=-\frac{2}{N}\partial_u\sqrt{-\gamma} && (11.70)\\ &=-2uh^{1/2}\left[u^{-4}h^{1/2}(1-\phi^2)^{1/2}\right]' && (11.71)\\ &\sim 2u^{-3}h\phi\phi'-2uh^{1/2}(u^{-4}h^{1/2})'\left(1-\frac{1}{2}\phi^2\right)\ . && (11.72)\end{aligned}$$

したがって

$$\mathcal{S}_{\rm GH}\xrightarrow{u\to 0}V_4\left(\frac{8}{u^4}-4\right)+\left(-\frac{4}{u^4}+2\right)\phi_{-k}\cdot\phi_k+\frac{2}{u^3}\phi_{-k}\cdot\phi'_k\Big|_{u=0}\ . \tag{11.73}$$

ギボンズ–ホーキング作用 (11.72) を変分すると，バルク作用 (11.61) の変分から生じた $\delta\phi'|_{u=0}$ の項が消えることが確かめられる：

$$\delta\mathcal{L}_{\rm bulk}=\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm bulk}}{\partial\phi''_k}\delta\phi'_k+\cdots\Big|_{u=0}^{u=1}=-\frac{2}{u^3}h\phi_{-k}\cdot\delta\phi'_k+\cdots\Big|_{u=0}\ , \tag{11.74}$$

$$\delta\mathcal{L}_{\rm GH}=\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm GH}}{\partial\phi'_k}\delta\phi'_k+\cdots\Big|_{u=0}=+\frac{2}{u^3}h\phi_{-k}\cdot\delta\phi'_k+\cdots\Big|_{u=0}\ . \tag{11.75}$$

$\cdots$ は $\delta\phi$ に比例する項をあらわす．

相殺作用

相殺作用は，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\rm CT}=&-\frac{1}{16\pi G_{p+2}}\int d^{p+1}x\,\sqrt{-\gamma}\left\{\frac{2p}{L}+\frac{L}{p-1}\mathcal{R}\right.\\ &\left.-\frac{L^3}{(p-3)(p-1)^2}\left(\mathcal{R}^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}-\frac{p+1}{4p}\mathcal{R}^2\right)+\cdots\right\}.\end{aligned} \tag{11.76}$$

記号の定義は 7.4 節を参照．久保公式では，ずり粘性 η は $O(\omega)$ からの寄与なので，2 階微分を含む $\mathcal{R}$ は実際には不要である．そこで初項だけを評価すると，

$$\mathcal{L}_{\rm CT} = -6\sqrt{-\gamma} \tag{11.77}$$
$$= -6u^{-4}h^{1/2}(1-\phi^2)^{1/2} \tag{11.78}$$
$$\sim -6u^{-4}h^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}\phi^2\right) . \tag{11.79}$$

したがって,

$$\mathcal{S}_{\rm CT} \xrightarrow{u\to 0} V_4\left(-\frac{6}{u^4}+3\right) + \left(\frac{3}{u^4}-\frac{3}{2}\right)\phi_{-k}\cdot\phi_k\Big|_{u=0} . \tag{11.80}$$

全境界作用

これまでの結果 (11.68), (11.73), (11.80) をまとめると,

$$\mathcal{S}_{\rm bulk} = V_4\left(-\frac{2}{u^4}+2\right) + \left(\frac{1}{u^4}-1\right)\phi_{-k}\cdot\phi_k - \frac{3}{2u^3}\phi_{-k}\cdot\phi'_k\Big|_{u=0} ,$$
$$\mathcal{S}_{\rm GH} = V_4\left(\frac{8}{u^4}-4\right) + \left(-\frac{4}{u^4}+2\right)\phi_{-k}\cdot\phi_k + \frac{2}{u^3}\phi_{-k}\cdot\phi'_k\Big|_{u=0} ,$$
$$\mathcal{S}_{\rm CT} = V_4\left(-\frac{6}{u^4}+3\right) + \left(\frac{3}{u^4}-\frac{3}{2}\right)\phi_{-k}\cdot\phi_k\Big|_{u=0} .$$

これらをあわせると,

$$\underline{\mathcal{S}} = V_4 - \frac{1}{2}\phi_{-k}\cdot\phi_k + \frac{1}{2u^3}\phi_{-k}\cdot\phi'_k\Big|_{u=0} . \tag{11.81}$$

一点関数

次元量を復活させると，境界作用は

$$\underline{\mathcal{S}} = \frac{r_0^4}{16\pi G_5 L^5}\left\{V_4 + \int(dk)\left[-\frac{1}{2}\phi_{-k}\phi_k + \frac{1}{2u^3}\phi_{-k}\phi'_k\right]\Big|_{u=0}\right\} . \tag{11.82}$$

初項の摂動によらない部分は，7.4 節で計算した自由エネルギーの Lorentzian 版である．第 3 項は 10.2.1 節で議論したスカラー場と同じであるが，第 2 項がある点が違う．この点はあとで問題にする．

ϕ_k は質量ゼロのスカラーの運動方程式を満たすので，漸近的な振るまいも式 (10.16) と同じである：

$$\phi_k \sim \phi_k^{(0)}\left(1+\phi_k^{(1)}u^4\right) \tag{11.83}$$

を使うと

$$\underline{\mathcal{S}} = \frac{r_0^4}{16\pi G_5 L^5}\left\{V_4 + \int(dk)\,\phi_{-k}^{(0)}\left(-\frac{1}{2}+2\phi_k^{(1)}\right)\phi_k^{(0)}\right\} . \tag{11.84}$$

$h_{xy} \propto \phi$ なので，T^{xy} の一点関数は

$$\delta\langle T_k^{xy}\rangle = \frac{\delta\underline{\mathcal{S}}}{\delta\phi_{-k}^{(0)}} \tag{11.85}$$

から求められる．ただし，10.2.3 節の Lorentzian 処方箋の注意点を考慮すると，

$$\delta\langle T_k^{xy}\rangle = \frac{r_0^4}{16\pi G_5 L^5}\left(-1+4\phi_k^{(1)}\right)\phi_k^{(0)} \ . \tag{11.86}$$

これがほしい結果である．この第 2 項が式 (11.4) である．

一方，式 (11.86) の第 1 項の寄与は何だろう？　この項は，式 (11.82) でスカラー場のときにはなかった項から来ている．**このため，式** (10.21) **の「バルク場の早く落ちる項」とオペレーターの期待値との対応が修正を受ける**．つまり，エネルギー運動量テンソルの場合，応答は $\phi_k^{(1)}$ だけで与えられるわけではない．

この修正項が存在するのは，実は流体力学と対応づけるのに必須である．9.3.6 節で曲がった時空での構成方程式を議論したが，完全な構成方程式は

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon+P)u^\mu u^\nu + Pg^{(0)\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} \tag{11.87}$$

である．9.3.6 節の久保公式の導出では，$\delta\langle\tau^{\mu\nu}\rangle$ のみを考えた．しかし，重力摂動を加えると，$\delta\langle T^{\mu\nu}\rangle$ には式 (11.87) の第 2 項から圧力に比例した項が出ることに注意しよう．式 (9.125) のように $g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}^{(0)}$ と展開すると[*10]，

$$\begin{aligned} \delta\langle T^{xy}\rangle &= Pg^{(0)xy} - 2\eta\,\Gamma^0_{xy} & (11.88)\\ &= -Ph_{xy}^{(0)} - \eta\,\partial_0 h_{xy}^{(0)} & (11.89)\\ &\xrightarrow{FT} (-P+i\omega\eta)h_{xy}^{(0)} \ . & (11.90)\end{aligned}$$

これが $\delta\langle T^{xy}\rangle$ に対する久保公式である．式 (11.86) の第 1 項は，この圧力の項をあらわしている．式 (11.86) と式 (11.90) を比べると，

$$P = \frac{1}{16\pi G_5 L}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4 = \frac{\pi^2}{8}N_c^2 T^4 \ . \tag{11.91}$$

これは自由エネルギーの計算から求めた結果 (7.58b) と一致する．

11.5 補遺：ベクトルモードの計算♦

これまでテンソルモードの計算をみたが，9.3.7 節でみたように輸送係数はベクトルモード，スカラーモードからも求まる．たとえば，ベクトルモードは

$$\omega = -i\frac{\eta}{Ts}q^2 \tag{11.92}$$

にポールをもつ．ここではベクトルモードの計算から η/s を求め，テンソルモードの計算と一致することを確かめる．

準備

重力摂動は一般座標変換 (2.68)

---

*10)　$g^{(0)\mu\nu} = \eta^{(0)\mu\nu} - h^{(0)\mu\nu}$ に注意．

$$h_{MN} \to h_{MN} + \nabla_M \xi_N + \nabla_N \xi_M \tag{11.93}$$

の下での不変性をもつので，まずゲージ固定をしておく．5 次元時空であれば，一般座標変換には 5 個の自由度 ξ^M があるので，5 個のゲージ固定条件が必要である．本書では

$$\text{ゲージ固定条件：}\quad h_{uM} = 0 \tag{11.94}$$

というゲージをとる．

残りの摂動は，9.3.7 節での $T^{\mu\nu}$ のテンソル分解と同様，$SO(2)$ の下での変換性で分類できる．境界時空 $x^\mu = (t, \boldsymbol{x}) = (t, x, y, z)$ に対して，フーリエ変換

$$h_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}, u) = \int (dk)\, e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} h_{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{k}, u) \tag{11.95}$$

し，$k_\mu = (\omega, 0, 0, q)$ ととると

$$\text{テンソル：}\quad h_{xy}, h_{xx} = -h_{yy}\ , \tag{11.96a}$$

$$\text{ベクトル：}\quad h_{0a}, h_{za}\ , \tag{11.96b}$$

$$\text{スカラー：}\quad h_{00}, h_{0z}, h_{zz}, h_{xx} = h_{yy}\ . \tag{11.96c}$$

ここで $x^a = (x, y)$．AdS/CFT 辞書によると（10.2.1 節），$T^{\mu\nu}$ のベクトルモードはベクトル摂動に結合するので，以下ではベクトル摂動を考える．

この計算は，テンソルモードと同様にして $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ を求めればいいが，ここでの主な興味はポール (11.92) だけなので，問題を少し簡単化できる．10.2.1 節でみたように

$$\phi \sim \phi^{(0)} \left(1 + \phi^{(1)} u^4\right) = A + Bu^4\ , \quad (u \to 0) \tag{11.97}$$

とすると，

$$\langle \mathcal{O} \rangle \propto \phi^{(1)} = \frac{B}{A} \tag{11.98}$$

となった．ここでの目的は $\langle \mathcal{O} \rangle$ のポールをみつけることだが，ポールは $A = 0$ に相当する．したがって，ϕ の方程式を AdS 境界でのディリクレ条件 $A = 0$ の下で解く．以下でみるように，この条件を満たすためには ω と q に関係がつかなければならず，これが分散関係に相当する．

一般相対論の立場では，このような計算を**準固有振動** (quasinormal frequency) の計算と言う*11)．「準」がつくのは，固有振動とは違い，一般に複素 ω 平面上にポールをもつためである．ブラックホールの立場では，これはブラックホールによる吸収をあらわす．つまり，ホライズンでの “incoming-wave” 境界条件から来る．一方，流体力学の立場では，これは粘性などによる散逸の

*11) 伝統的には，準固有振動の計算は漸近的平坦なブラックホールでおこなわれ，その場合は $r \to \infty$ で “outgoing-wave” 境界条件を課す．しかし，漸近的 AdS 時空の場合は，宇宙項によるポテンシャル障壁があるため（6.2 節），ディリクレ条件を課すのが自然である．

効果である.

摂動方程式の導出

ベクトル摂動に属するのは h_{0a}, h_{za} であるが，対称性より $a=x$ と $a=y$ の場合は同じなので，$a=x$ の場合のみを考える．まずベクトル摂動に対して摂動方程式を書き下す．これは，もちろんアインシュタイン方程式から導けるが，以下のように対称性を使えばもっと楽に導くことができる．

ベクトル摂動は（修正された）マクスウェル方程式を満たす．これは，x 方向に対して並進不変性があるからである．x 方向に並進不変性があるので，想像上の S^1 コンパクト化を考えることができる*12)．コンパクト化によって，5 次元の計量 g_{MN} は g_{xx}, $g_{\alpha x}$, $g_{\alpha\beta}$ の 3 種類に分類できる（添字 α は x 以外の方向を走り，計量は x^α のみに依存するとする）．コンパクト化した 4 次元の立場では*13)，x を「見ない」ので，これらはスカラー，ベクトル，テンソルとして振るまう．とくに $g_{\alpha x}=h_{\alpha x}$ はマクスウェル場として振るまう．具体的には，

$$ds_5^2 = g_{MN}dx^M dx^N = e^{2\sigma}(dx + A_\alpha dx^\alpha)^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{11.99}$$

とおく（$e^{2\sigma} := g_{xx}$）．いまの場合は，$h_{0x} = g_{xx}A_0$, $h_{zx} = g_{xx}A_z$ のみがある．コンパクト化によって，

$$\mathcal{S}_5 = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\,\sqrt{-g_5}R_5 \tag{11.100}$$

$$= \frac{1}{16\pi G_5}\int dx \int d^4x\,\sqrt{-g_4}e^{\sigma}\left(R_4 - \frac{1}{4}e^{2\sigma}F_{\alpha\beta}^2\right) \tag{11.101}$$

となる*14)．このように，コンパクト化から生じるマクスウェル場の作用には $e^{3\sigma} = g_{xx}^{3/2}$ の因子がつく．したがって A_α の運動方程式は，

$$\nabla_\beta(e^{3\sigma}\sqrt{-g_4}F^{\alpha\beta}) = 0 \tag{11.105}$$

---

*12) これは，あくまで運動方程式を導く便法である．

*13) ここでの 4 次元とは，x をコンパクト化した残りの (t,y,z,u) を指し，境界の意味の 4 次元 (t,x,y,z) とは違うことに注意．

*14) ♦ この作用の導出は，ほかの教科書をみてもらいたいが，作用の形自体は対称性から理解できる．計量 (11.99) は

$$x \to cx, \quad A_\alpha \to cA_\alpha, \quad e^\sigma \to c^{-1}e^\sigma, \quad g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}, \tag{11.102}$$

の下で不変であるため，作用 (11.101) もこの不変性を保つはずである．ここから σ 依存性を確かめることができる．変換 (11.102) は，もとの 5 次元一般座標変換の一部である．A_α がマクスウェル場として振るまうのも，5 次元一般座標変換の一部として

$$x \to x - \Lambda(x^\alpha) \tag{11.103}$$

という不変性があり，これが 4 次元の立場ではゲージ変換

$$A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda \tag{11.104}$$

にほかならないからである．

である．

この運動方程式の各成分 ($\alpha = u, 0, z$) を書き下すと，

$$g^{00}\omega A_0' - qg^{zz}A_z' = 0\ , \tag{11.106a}$$

$$\partial_u\left(\sqrt{-\tilde{g}}g^{00}g^{uu}A_0'\right) - \sqrt{-\tilde{g}}g^{00}g^{zz}\left(\omega q A_z + q^2 A_0\right) = 0\ , \tag{11.106b}$$

$$\partial_u\left(\sqrt{-\tilde{g}}g^{zz}g^{uu}A_z'\right) - \sqrt{-\tilde{g}}g^{00}g^{zz}\left(\omega q A_0 + \omega^2 A_z\right) = 0\ . \tag{11.106c}$$

ここで $'\ :=\ \partial_u$，$\sqrt{-\tilde{g}}\ :=\ e^{3\sigma}\sqrt{-g_4}\ =\ e^{2\sigma}\sqrt{-g_5}$ である．式 (11.106a), (11.106b) より A_0' だけを含む方程式が得られる：

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\partial_u(\sqrt{-\tilde{g}}g^{00}g^{uu}A_0')}{\sqrt{-\tilde{g}}g^{00}g^{zz}}\right] + \left(-\frac{g^{00}}{g^{zz}}\omega^2 - q^2\right)A_0' = 0\ . \tag{11.107}$$

これがベクトル摂動に対する摂動方程式である．

摂動方程式の解

SAdS_5 ブラックホールの場合，式 (11.107) は

$$\frac{1}{hu^3}\left(hu^3F'\right)' + \frac{\mathfrak{w}^2 - \mathfrak{q}^2 h}{\pi^2 h^2}F = 0\ , \tag{11.108}$$

$$F(u) := u^{-3}A_0' = u^{-3}\left(\frac{h_{0x}}{g_{xx}}\right)'\ . \tag{11.109}$$

この場合は質量ゼロのスカラーの運動方程式 (11.17) とは違うことに注意．

ホライズン近傍では式 (11.20) と同じ

$$F'' - \frac{1}{1-u}F' + \left(\frac{\mathfrak{w}}{4\pi}\right)^2\frac{1}{(1-u)^2}F \simeq 0 \tag{11.110}$$

なので “incoming-wave” 境界条件を満たす解は，

$$F \propto (1-u)^{-i\mathfrak{w}/(4\pi)}\ , \qquad (u \to 1) \tag{11.111}$$

$$\simeq 1 - \frac{i\mathfrak{w}}{4\pi}\ln(1-u) + O(\mathfrak{w}^2) \tag{11.112}$$

である．

次に式 (11.108) を $(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$-展開で解く：

$$F = F_0(u) + \mathfrak{w}F_{10}(u) + \mathfrak{q}^2F_{01}(u) + \cdots \tag{11.113}$$

式 (11.108) より，各次数が満たすべき式は，

$$\hat{\mathcal{L}}F_0 = 0\ , \tag{11.114a}$$

$$\hat{\mathcal{L}}F_{10} = 0\ , \tag{11.114b}$$

$$\hat{\mathcal{L}}F_{01} = j_{01}\ . \tag{11.114c}$$

ここで

$$\hat{\mathcal{L}}\varphi := (p(u)\varphi')' \ , \quad p(u) := hu^3 \ , \quad j_{01}(u) := \frac{F_0}{\pi^2}u^3 \ . \tag{11.115}$$

11.1.4 節のテンソルモード同様，式 (11.114a)–(11.114c) をホライズン $u \to 1$ と AdS 境界 $u \to 0$ に境界条件を課して解く．ホライズンでの境界条件は，式 (11.112) に帰着したので，各次数に対しては，

$$F_0(u \to 1) = C \ , \tag{11.116a}$$

$$F_{10}(u \to 1) = -C\frac{i}{4\pi}\ln(1-u) \ , \tag{11.116b}$$

$$F_{01}(u \to 1) = 0 \ , \tag{11.116c}$$

となる．

式 (11.114a)–(11.114c) を解くには，まず同次方程式 $\hat{\mathcal{L}}\varphi = 0$ を解く．同次方程式の 2 つの独立解を φ_1, φ_2 と書く．すると，非同次方程式 $\hat{\mathcal{L}}\varphi = j$ の解も φ_1, φ_2 で書ける．式 (11.116c) の境界条件の下では，

$$\varphi(u) = \varphi_1(u)\int_u^1 du' \, \frac{j(u')\varphi_2(u')}{p(u')W(u')} - \varphi_2(u)\int_u^1 du' \, \frac{j(u')\varphi_1(u')}{p(u')W(u')} \tag{11.117}$$

が非同次方程式の解である．W はロンスキアンである：

$$W(u) := \varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2' \ . \tag{11.118}$$

$\hat{\mathcal{L}}\varphi = 0$ を解くと，φ_1, φ_2 は

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = C_1\left\{\frac{1}{4}\ln\frac{1+u^2}{1-u^2} - \frac{1}{2u^2}\right\} + C_2 \tag{11.119}$$

となる（C_1, C_2 は積分定数）．φ のホライズン近傍での振るまいは

$$\varphi \sim C_1\left\{-\frac{1}{4}\ln(1-u) - \frac{1}{2}\right\} + C_2 \ , \qquad (u \to 1) \tag{11.120}$$

この振るまいとホライズンでの境界条件 (11.116a)–(11.116c) を比べて，解が得られる：

$$F_0 = C \ , \tag{11.121a}$$

$$F_{10} = C\frac{i}{\pi}\left\{\frac{1}{4}\ln\frac{1+u^2}{1-u^2} - \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2}\right\} \ , \tag{11.121b}$$

$$F_{01} = \frac{C}{8\pi^2}\left(-1 + \frac{1}{u^2}\right) \ . \tag{11.121c}$$

F_{01} に対しては，式 (11.117) を使った．

以上より

$$\frac{F}{C} = 1 + \frac{i}{\pi}\mathfrak{w}\left\{\frac{1}{4}\ln\frac{1+u^2}{1-u^2} - \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{8\pi^2}\mathfrak{q}^2\left(-1+\frac{1}{u^2}\right) + \cdots \ . \tag{11.122}$$

この解は，AdS 境界 $u \to 0$ で

$$\frac{F}{C} \xrightarrow{u \to 0} \frac{\mathfrak{q}^2 - 4\pi i \mathfrak{w}}{8\pi^2 u^2} \tag{11.123}$$

と発散する．したがって，$u \to 0$ でディリクレ条件を課すには

$$\mathfrak{w} = -\frac{i}{4\pi}\mathfrak{q}^2 \to \omega = -\frac{i}{4\pi T}q^2 \tag{11.124}$$

を満たさなければいけない．式 (11.92) と比べて

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \ . \tag{11.125}$$

これは久保公式の結果 (11.7) と一致する．

第 12 章
相転移の初歩

本章では相転移とそれにまつわる現象について，主に平均場理論の立場から説明する．

12.1 相転移

相転移とは，熱力学系で温度などの制御変数 (control parameter) を変化させたときに，より安定なマクロに異なる状態に変化することである．

n 次の相転移とは，熱力学ポテンシャル F（自由エネルギーなど）の n 階微分で解析性が破れることを意味する*1)．したがって，

- 1 次相転移：F は連続だが，F' が不連続*2)．
- 2 次相転移：F, F' は連続だが，F'' が不連続（または発散）．

2 次相転移は，1 次相転移の端点としてしばしばあらわれる．

一例として，強磁性体では転移温度 T_c 以下で自発磁化 M があらわれ，$T = T_c$ で $M = 0$ になる（図 12.1 (a)）．M のように，2 つの相の区別を与えるマクロな変数を**秩序変数** (order parameter) と言う．

熱力学と同様，磁性体の場合も自由エネルギー $F = F(T, M)$ を考える．しかし，通常の実験下では，磁場 H を制御変数として使うので，ルジャンドル変換してギブス自由エネルギーを考える*3)：

---

*1) 9.2 節で，熱力学の基本関係式には解析性を要求していた．しかし，独立変数の一部として示強変数を使う表示では，熱力学ポテンシャルは相転移点で解析性を失いうる．(相図は (T, P) や (T, μ) などのように，ふつう示強変数で描くので，相の境界をまたぐと解析性が破れる．)

*2) 熱力学ポテンシャルの変数についての微分であれば何でも構わないので，ここでは何の微分かは特定しない．

*3) もともとのギブス自由エネルギーは，圧力 P を独立変数にした場合の自由エネルギーだが，一般にこのような場合もギブス自由エネルギーと呼ぶことが多い．

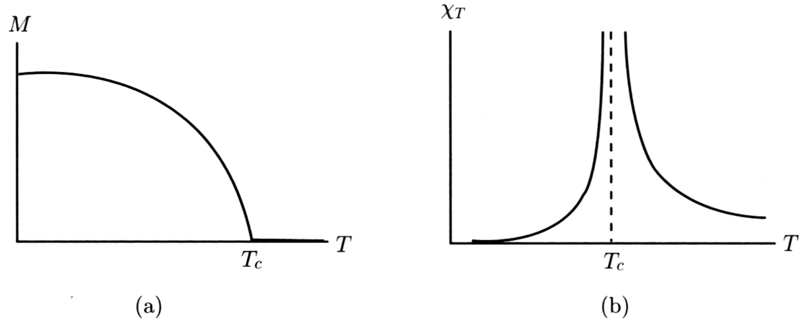


図 12.1　(a) 秩序変数の温度依存性．(b) 磁化率の発散．

$$G(T,H) = F - MH \ . \tag{12.1}$$

すると

$$M = -\left(\frac{\partial G}{\partial H}\right)_T \ . \tag{12.2}$$

F の形自体は，以下では平均場理論を用いて決める．強磁性体の場合，M は相転移点で連続なので（磁場 $H=0$ の場合），これは 2 次相転移を意味する．

2 次相転移では，スピンの相関長 ξ が $\xi \to \infty$ となり，マクロな長さの相関長をもつ．その結果として，さまざまな物理量が発散する．たとえば，磁化率 $\chi_T = \partial m/\partial H \to \infty$ となる（図 12.1 (b)）．このような発散をパラメトライズするために，**臨界指数** (critical exponent) γ を導入して $\chi_T \propto |T-T_c|^{-\gamma}$ と書く．臨界指数は系の対称性や空間次元などによるが，ミクロな物理の詳細にはよらないことが知られている．この性質を**ユニバーサリティ**と言い，2 つの系の臨界指数の値が同じとき，2 つの系は同じユニバーサリティ・クラスに属すると言う．ミクロな物理がまったく違った系でも，同じユニバーサリティ・クラスに属することがある．たとえば，イジング・モデルと気液相転移は同じユニバーサリティ・クラスに属する*4)．

12.1.1　2 次相転移

以下では主に**平均場理論**を用いて，相転移を議論する．分配関数 Z は擬自由エネルギー $\mathcal{S}[m;T,H]$ を使って*5)

$$Z = \int \mathcal{D}m \, e^{-\beta \mathcal{S}[m;T,H]} \tag{12.3}$$

で与えられる．ただし秩序変数 m は基本的な場とは限らない．平均場理論では秩序変数 m の熱的ゆらぎを無視し，鞍点近似で Z を評価する：

*4)　臨界現象の教科書としては，文献 [63], [64] がある．

*5)　「擬」自由エネルギーと呼ぶのは，m の汎関数積分が実行されていない，あるいは平均場理論の意味では m を消去した on-shell 作用でないからである．

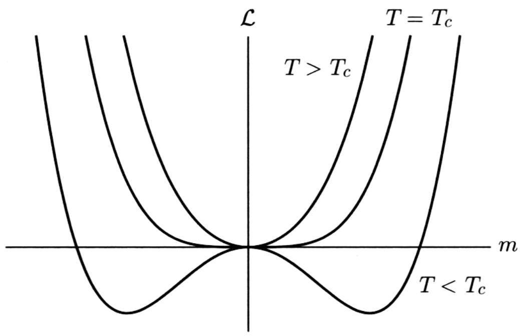


図 12.2　2 次相転移の場合の擬自由エネルギー.

$$Z \simeq e^{-\beta \underline{\mathcal{S}}(T,H)} . \tag{12.4}$$

$\underline{\mathcal{S}}$ は m の解を代入したことをあらわす（"on-shell 作用"）．したがって，ギブス自由エネルギーは $G(T,H) = \underline{\mathcal{S}}(T,H)$ である．このように，これまで重力理論を使って議論してきたのと同じ手法が平均場理論である．

例として，イジング模型の平均場理論を考える．まず，空間的に一様な場合を考える．この場合 G と $\mathcal{S}$ のかわりに，自由エネルギー密度 g ($G =: gV$)，擬自由エネルギー密度 $\mathcal{L}$ ($\mathcal{S} =: \mathcal{L}V$) を使うのが便利である．イジング模型の場合，擬自由エネルギー密度 $\mathcal{L}$ は以下の事実から決められる：

1. 外場がないときは，スピン変数 S_i に対して反転対称性 $S_i \to -S_i$ を課すのが自然である[*6]．磁化密度は $m := \sum_i \langle S_i \rangle / V$ なので，$\mathcal{L}$ も m の偶関数でなければいけない.
2. $T = T_c$ 近傍では m は小さいので，$\mathcal{L}$ を m のベキ級数として展開できる.

すると，擬自由エネルギー密度 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L}[m; T, H] = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}am^2 + \frac{1}{4}bm^4 + \cdots - mH . \tag{12.6}$$

このような理論を**ギンツブルグ–ランダウ (GL) 理論**と言う．これは素粒子物理で言うヒッグス型のポテンシャルであり（図 12.2)，$a > 0$ のときは原点 $m = 0$ で $\mathcal{L}$ が最小になり，高温での振るまいと一致する．一方，$a < 0$ のときは対称性の破れが起き，$m \neq 0$ の自発磁化をもつので，これは低温での振るまいである．したがって，

$$a = a_0(T - T_c) + \cdots \quad (a_0 > 0) , \qquad b = b_0 + \cdots \quad (b_0 > 0) , \tag{12.7}$$

---

*6）実際，イジング模型のハミルトニアン H は，

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \tag{12.5}$$

なので（和は最近接サイトどうしでとる），$S_i \to -S_i$ の下で不変である.

という形を仮定する．

自発磁化は $\partial_m \mathcal{L}|_{H=0} = am + bm^3 = 0$ より

$$m = \sqrt{-\frac{a}{b}} \propto (T_c - T)^{1/2} \ . \tag{12.8}$$

したがって，（$T < T_c$ での）自由エネルギー密度 $g = \underline{\mathcal{L}}$ は

$$g(T,H) = \mathcal{L}_0 + m^2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}m^2\right) = \mathcal{L}_0 - \frac{a^2}{4b} \tag{12.9}$$

なので比熱は

$$C_H = -T\frac{\partial^2 g}{\partial T^2} = \frac{a_0^2}{2b_0}T \ , \qquad (H=0,\, T<T_c) \ . \tag{12.10}$$

磁場を加えたときは，

$$\partial_m \mathcal{L} = am + bm^3 - H = 0 \tag{12.11}$$

より臨界点直上で

$$m^3 \propto H \ , \qquad (T = T_c) \ . \tag{12.12}$$

式 (12.11) を H でさらに微分すると，$(a+3bm^2)\partial m/\partial H - 1 = 0$ なので，磁化率 χ_T は*7)

$$\chi_T := \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{1}{a+3bm^2} = \frac{1}{-2a} \propto \frac{1}{|T-T_c|} \ , \qquad (T<T_c) \ . \tag{12.13}$$

4 つの臨界指数 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ を

$$\text{比熱：}\ C_H \propto |T-T_c|^{-\alpha} \ , \tag{12.14a}$$

$$\text{自発磁化：}\ m \propto |T-T_c|^{\beta} \ , \qquad (T<T_c), \tag{12.14b}$$

$$\text{磁化率：}\ \chi_T \propto |T-T_c|^{-\gamma} \ , \tag{12.14c}$$

$$\text{「臨界等温線」：}\ m \propto |H|^{1/\delta} \ , \qquad (T=T_c), \tag{12.14d}$$

と定義すると，以上の結果より*8)，

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, 3\right) \tag{12.15}$$

が得られた．

12.1.2 1 次相転移

反転対称性をもたないときは，$O(m^3)$ の項が存在し，1 次相転移が起こり

---

*7) 熱力学的感受率とも呼ばれる．

*8) ここでは $T < T_c$ で指数 (α, γ) を求めたが，$T > T_c$ でも同じ値をとる．$T > T_c$ では $m = 0$ なので，$\underline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_0$ であり，$\alpha = 0$ である．また，式 (12.13) より $\chi_T = 1/a$ なので，$\gamma = 1$ である．

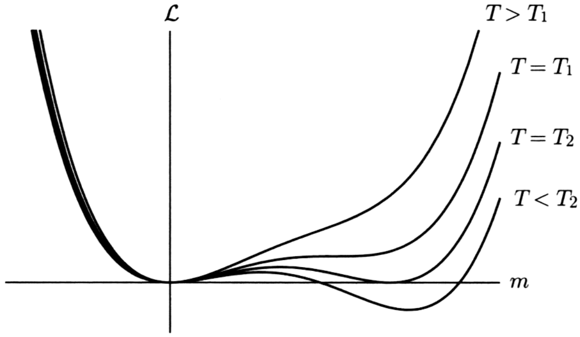


図 12.3　1 次相転移の場合の擬自由エネルギー.

うる：

$$\mathcal{L}[m;T,H] = \frac{1}{2}am^2 - \frac{1}{3}cm^3 + \frac{1}{4}bm^4 + \cdots - mH \ , \tag{12.16}$$

$$a = a_0(T - T_0) + \cdots \ . \tag{12.17}$$

以下 $H = 0$ とする．以下みるように，$T = T_0$ は転移温度 T_c とは異なることに注意.

十分高温 $a \gg 0$ では，前節と同じように $m = 0$ である．$a < a_1$ では $m \neq 0$ に極値をもつ（図 12.3）．しかし $m \neq 0$ は $m = 0$ より自由エネルギーが高いので，これは局所安定な準安定状態である．$\partial_m \mathcal{L} = m(a - cm + bm^2) = 0$ より

$$m = 0, \quad m = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b} \tag{12.18}$$

なので，$m \neq 0$ の実数解をもつ条件から

$$a_1 = \frac{c^2}{4b} \ . \tag{12.19}$$

さらに低温 $a < a_2$ で，$m \neq 0$ は $m = 0$ より自由エネルギーが低くなる．2 次相転移では $T = T_c$ で連続的に m が変化したが，この場合は $m = 0$ から $m \neq 0$ に不連続にとぶ 1 次相転移である（このときの温度が T_c である）．$\mathcal{L} = m^2(a/2 - cm/3 + bm^2/4) = 0$ の解は

$$m = 0, \quad m = \frac{2c \pm \sqrt{2(2c^2 - 9ab)}}{3b} \tag{12.20}$$

なので，$m \neq 0$ の実数解をもつ条件から

$$a_2 = \frac{2c^2}{9b} \ . \tag{12.21}$$

2 次相転移は臨界点に近づければ m をいくらでも小さくできるが，1 次相転移はそうではない．したがって，式 (12.16) のようなベキ展開が成立するかどうかは注意が必要である.

12.1.3 非一様な場合

2 次相転移を空間的に一様でない場合に拡張する．平衡状態の一様性を保証するために $(\partial_i m)^2$ 項をつけ加える：

$$\mathcal{S}[m;T,H] = \int d^{d_s}x \left[\frac{1}{2}(\partial_i m)^2 + \frac{a}{2}m^2 + \frac{b}{4}m^4 + \cdots - mH\right] . \tag{12.22}$$

ここで d_s は**空間次元**をあらわす．am^2 項は秩序変数場 m に対しての「質量項」に相当し，臨界点では m が「質量ゼロ」になる．このため，特性長さ（相関長）ξ が発散し，m は長距離相関をもつ：

$$\xi = \frac{1}{(\text{質量})} = a^{-1/2} \propto (T - T_c)^{-1/2} . \tag{12.23}$$

空間的に一様な場合，$T > T_c$ で臨界指数 (α, γ) を求めるには 4 次の項 m^4 は本質的ではなかった．そこで，以下でも 2 次の項までで考える．この場合，

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta m} = -\partial_i^2 m + am - H = 0 . \tag{12.24}$$

この場合の「磁化率」*9) を

$$\chi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{\delta m(\boldsymbol{x})}{\delta H(\boldsymbol{x}')} \tag{12.28}$$

と定義すると，

$$(-\partial_{\boldsymbol{x}}^2 + a)\chi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') . \tag{12.29}$$

フーリエ変換すると，

$$(\boldsymbol{k}^2 + a)\chi_{\boldsymbol{k}} = 1 . \tag{12.30}$$

$\chi_T = 1/a$ だったので，$\chi_T = \chi_{\boldsymbol{k}\to 0}$ である．$T \neq T_c$ のとき，$\chi(\boldsymbol{r})$ は湯川型の形

$$\chi(\boldsymbol{r}) \propto r^{-(d_s-1)/2} e^{-r/\xi} \tag{12.31}$$

となり，$r \simeq \xi$ 程度で相関がなくなる．一方 $T = T_c$ のとき，$\chi(\boldsymbol{r})$ はクーロン

*9) 静的感受率，静的応答関数と呼ばれる．相関関数 $G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ は

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') := \langle m(\boldsymbol{x})m(\boldsymbol{x}')\rangle - \langle m(\boldsymbol{x})\rangle\langle m(\boldsymbol{x}')\rangle = \frac{1}{\beta^2}\frac{\delta^2 \ln Z}{\delta H(\boldsymbol{x})\delta H(\boldsymbol{x}')} \tag{12.25}$$

で与えられ，磁化は

$$m(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\beta}\frac{\delta \ln Z}{\delta H(\boldsymbol{x})} \tag{12.26}$$

なので，相関関数と「磁化率」とは

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{1}{\beta}\frac{\delta m(\boldsymbol{x})}{\delta H(\boldsymbol{x}')} := T\chi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{12.27}$$

の関係にある．

型の形

$$\chi(\boldsymbol{r}) \propto r^{-d_s+2} \tag{12.32}$$

をとる．

非一様な場合にあらわれる新たな指数 (ν, η) を

$$\text{静的感受率：}\ \chi(\boldsymbol{r}) \propto e^{-r/\xi}\ , \qquad (T \neq T_c), \tag{12.33a}$$

$$\propto r^{-d_s+2-\eta}\ , \qquad (T = T_c), \tag{12.33b}$$

$$\text{相関長：}\ \xi \propto |T - T_c|^{-\nu}\ . \tag{12.33c}$$

と定義すると，

$$(\nu, \eta) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \tag{12.34}$$

が得られたことになる．

12.1.4 臨界現象

臨界指数とスケーリング関係式

臨界現象では伝統的に 6 つの指数が登場し，GL 理論の場合，12.1.1, 12.1.3 節より，

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, 3, \frac{1}{2}, 0\right) \tag{12.35}$$

となる．6 つの臨界指数を導入したが，これらは独立ではなく，以下の**スケーリング関係式**を満たす：

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2\ , \tag{12.36a}$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1)\ , \tag{12.36b}$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta)\ , \tag{12.36c}$$

$$2 - \alpha = \nu d_s\ . \tag{12.36d}$$

空間次元 d_s に依存する式 (12.36d) のような関係式を**ハイパースケーリング関係式**と言う．GL 理論は，ハイパースケーリング関係式以外のスケーリング関係式を満たすことが確かめられる（ハイパースケーリング関係式の破れについては，以下でふれる）．

スケーリング関係式は，特定の理論（たとえば GL 理論）によらずに成立する．したがって，AdS/CFT で臨界現象を調べる際も，これらの関係式が成立しているかに注目すべきである（もっとも，本書で挙げる例では，単純な GL 理論の指数しか出ない）．

スケーリング関係式が 4 つあるので，6 つの指数のうち 2 つだけが独立である．このことは，これらの関係式の背後になにか構造があることを示唆する．

実際，これらの関係式は自由エネルギー密度 $g(t,H)$ の**スケーリング則**から導出できる：

$$g(t,H) = b^{-d_s} g(b^{y_t} t, b^{y_h} H) \ . \tag{12.37}$$

ここで $t := (T - T_c)/T_c$ である．$b^{y_t} t = 1$ と選ぶと，式 (12.37) より

$$g(t,H) = t^{d_s/y_t} g(1, t^{-y_h/y_t} H) =: t^{d_s/y_t} \tilde{g}(t^{-y_h/y_t} H) \ . \tag{12.38}$$

スケーリング則により，6 つの臨界指数は 2 つのパラメータ (y_t, y_h) で書きあらわすことができる：

$$C_H(t,0) \propto \frac{\partial^2 g(t,0)}{\partial t^2} \propto t^{d_s/y_t - 2} \ , \tag{12.39a}$$

$$m(t,0) \propto \left. \frac{\partial g(t,H)}{\partial H} \right|_{H=0} \propto t^{(d_s - y_h)/y_t} \ , \tag{12.39b}$$

$$\chi_T(t,0) \propto \left. \frac{\partial^2 g(t,H)}{\partial H^2} \right|_{H=0} \propto t^{(d_s - 2y_h)/y_t} \ , \tag{12.39c}$$

$$m(0,H) \propto \frac{\partial g(0,H)}{\partial H} \propto b^{-d_s + y_h} g_2(0, b^{y_h} H) = H^{(d_s - y_h)/y_h} \ . \tag{12.39d}$$

ここで，g_2 は第 2 引数についての微分で，$b^{y_h} H = 1$ と選んだ．同様に，応答関数のスケーリング則から (ν, η) も決めることができる．このようにして，

$$\alpha = 2 - d_s/y_t \ , \tag{12.40a}$$

$$\beta = \frac{d_s - y_h}{y_t} \ , \tag{12.40b}$$

$$\gamma = \frac{2y_h - d_s}{y_t} \ , \tag{12.40c}$$

$$\delta = \frac{y_h}{d_s - y_h} \ , \tag{12.40d}$$

$$\nu = 1/y_t \ , \tag{12.40e}$$

$$\eta = d_s - 2y_h + 2 \ . \tag{12.40f}$$

式 (12.40a)–(12.40f) はスケーリング関係式 (12.36a)–(12.36d) を満たすことが確かめることができる．

スケーリング則はくりこみ群の立場から正当化されるのだが，GL 理論 (12.22) がスケーリング則 (12.37) を満たすことは，簡単に確かめられる．GL 理論は

$$\mathcal{L} \simeq a_0 t\, m^2 + b_0 m^4 - mH \tag{12.41}$$

$$\simeq t^2 \{ a_0 \tilde{m}^2 + b_0 \tilde{m}^4 - \tilde{m}\tilde{H} \} \ . \tag{12.42}$$

ここで $m = \tilde{m} t^{1/2}, H = \tilde{H} t^{3/2}$ とすることで，t 依存性をくくり出した．運動方程式の解は $\tilde{m} = f(\tilde{H})$ なので，自由エネルギー密度は

$$\underline{\mathcal{L}} \simeq t^2\{a_0 f(\tilde{H})^2 + b_0 f(\tilde{H})^2 - \tilde{H} f(\tilde{H})^2\} \tag{12.43}$$

となるが，これは $d_s/y_t = 2$, $y_h/y_t = 3/2$ のスケーリング則の形である．

臨界指数と空間次元

これまでの結果からも明らかなように，平均場理論の結果は次元にはよらない．これは秩序変数の統計的ゆらぎの効果を無視しているからである．ゆらぎの効果は一般に低次元ほど大きくなるため，臨界指数の正しい値も次元によって異なる．とくに重要な空間次元が 2 種類ある：

- **上部臨界次元** d_{UC}：十分高次元 $d_s \geq d_{\mathrm{UC}}$ ではゆらぎの効果が小さくなり，平均場の結果が信頼できる．この d_{UC} はギンツブルグの規準と呼ばれる方法で見積もることができ，

$$d_{\mathrm{UC}} = \frac{2\beta + \gamma}{\nu} = \frac{2 - \alpha}{\nu} \ . \tag{12.44}$$

  GL 理論では $d_{\mathrm{UC}} = 4$ である．したがって，$d_s \geq 4$ では平均場の結果で問題ないが，現実の $d_s = 3$ では指数の値は修正される．

- **下部臨界次元** d_{LC}：一方，十分低次元 $d_s \leq d_{\mathrm{LC}}$ ではゆらぎが大きくなりすぎて，有限温度では相転移自体が起こらなくなる（Coleman–Mermin–Wagner の定理 [65], [66]）．イジング模型のような離散的対称性をもつ系では $d_{\mathrm{LC}} = 1$，連続的対称性をもつ系では，$d_{\mathrm{LC}} = 2$ である．

ハイパースケーリング関係式 (12.36d) は空間次元に依存するが，平均場の結果は次元に依存しない．したがって，平均場理論では，ハイパースケーリング関係式が常に成立するわけではない．しかし，平均場の結果は $d_s \geq d_{\mathrm{UC}}$ で信頼できるはずである．このことは，上部臨界次元以上ではハイパースケーリング関係式は成りたたないことを意味する．これは自由エネルギーのスケーリング則が，有意でない危険なオペレーター (dangerous irrelevant operator) と呼ばれるものによって破綻するからである．平均場理論とハイパースケーリング関係式が両方信頼できるのは $d_s = d_{\mathrm{UC}}$ のときである．GL 理論は，たしかに $d_s = 4$ でハイパースケーリング関係式を満たす．

静的臨界現象と動的臨界現象

さて，大ざっぱに言って，臨界現象は 2 つに分けられる．

- 静的臨界現象：通常臨界現象と言うときは，静的臨界現象を指す．静的臨界現象では，さまざまな熱力学量に異常が見られ，その異常を静的臨界指数を使ってあらわす．
- 動的臨界現象 [67]：臨界点近傍では，動的な量にも異常があらわれる．動的

な場合，興味ある量の一つは緩和時間 τ である．動的臨界現象では，この緩和時間も発散する*10)：

$$\tau \simeq \xi^z \to \infty \,. \tag{12.45}$$

この場合の臨界指数 z を，動的臨界指数 (dynamic critical exponent) と言う．緩和時間が発散するということは，摂動を与えても系がなかなか緩和しないということである．このため，この現象を**臨界減速** (critical slowing down) とも言う．

動的臨界指数の値は，動的ユニバーサリティ・クラスによる．動的ユニバーサリティ・クラスは，静的ユニバーサリティ・クラスの決定には影響しなかった系の新たな性質に依存する．とくに，保存則は動的ユニバーサリティ・クラスを決定するうえで重要な働きをする．保存則があると，系の緩和がよりゆっくり進行するように働くからである．結果として，2 つの系が同じ静的ユニバーサリティ・クラスに属していても，同じ動的ユニバーサリティ・クラスに属するとは限らない．このような現象を調べるために，ギンツブルグ–ランダウ理論を動的な場合に拡張した理論，時間依存するギンツブルグ–ランダウ方程式 (time-dependent Ginzburg–Landau equation，略して TDGL 方程式）が使われる．静的／動的どちらの臨界現象も AdS/CFT で議論されている[68]．

12.2 超伝導

次に，相転移を伴う現象として超伝導／超流動を考える．この場合の GL 理論は，

$$\mathcal{L}[\psi; T, A_i] = \frac{1}{2m_*}|(-i\hbar\partial_i - e_* A_i)\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 \tag{12.46}$$

で与えられる*11)．これまでと比べて新しい要素は，

1. 秩序変数 ψ が複素場になっている．
2. ゲージ場 A_i と結合している．ゲージ場が結合しない場合は，超流動に相当する．

の 2 点である．第一の点は，超伝導／超流動が巨視的な量子現象であることか

*10) 系にはさまざまなモードが存在し，それぞれ緩和時間は異なるので，何の緩和時間か特定しておく必要がある．相転移では秩序変数にまつわる諸量に異常がみられる．したがって，τ も第一義的には，秩序変数の緩和時間のことである．ただし，一般に秩序変数は系のほかのモードとも結合するので，秩序変数の異常がほかのモードの異常となってあらわれることがある（モード・モード結合）．その場合，以下の動的臨界指数も z だけではなく，複数の指数があらわれる．

*11) ここで $A_0 = 0$ のゲージをとっている．

ら来る．超伝導の微視的理論，BCS 理論によると，電子対が結晶格子のゆがみを通してクーパー対を作り，クーパー対が凝縮することで超伝導状態が構成される．秩序変数 ψ は，クーパー対の波動関数に相当し，巨視的波動関数／擬波動関数と呼ばれる[*12)]．

第二に，ゲージ場と結合することから，超伝導に特徴的な現象として

- 抵抗ゼロ，つまり伝導率の発散[*13)]
- マイスナー効果：超伝導体から磁場が排除される（完全反磁性）

が挙げられる．このうち，超伝導にユニークなのは**マイスナー効果**である．伝導率の発散は完全導体でも説明がつく．また，磁場をかけたときに磁束が侵入できないのは完全導体でも起こる．しかし超伝導では，常伝導状態で磁束が侵入している状況で，温度を下げて超伝導状態になったときにも磁束が排除される．これは完全導体では説明できない．完全導体では磁束の時間変化がないように働くからである（$B=0$ ではなく $\partial B/\partial t=0$）[*14)]．

擬自由エネルギー $\mathcal{L}$ を使い，まず空間的に一様で，ゲージ場が結合していない場合を考える．この場合は磁性体と同じで

$$|\psi|^2=\frac{a}{b}\propto(T_c-T) \tag{12.47}$$

となる．また，秩序変数は有効質量をもつ．

次に空間的に一様でない場合を考える．$\psi(x)\ =\ |\psi(x)|e^{i\theta(x)/\hbar}$ と書くと，式 (12.46) は

$$\mathcal{L}=\frac{\hbar^2}{2m_*}(\partial_i|\psi|)^2+\frac{1}{2m_*}|\psi|^2(\partial_i\theta-e_*A_i)^2+a|\psi|^2+\cdots\ . \tag{12.48}$$

したがって，

1. ゲージ場が結合していない場合：振幅 $|\psi|$ と違って位相 θ は有効質量をもたない．θ は大域的 $U(1)$ 対称性の自発的破れにともなう南部–ゴールドストン・ボゾンだからである．
2. ゲージ場が結合した場合：θ の自由度はゲージ変換

$$\psi(x)\to e^{i\alpha(x)}\psi(x)\ , \tag{12.49}$$

$$A_i(x)\to A_i(x)+\frac{1}{e_*}\partial_i\alpha(x)\ , \tag{12.50}$$

によってゲージ場に吸収できる[*15)]．したがって，南部–ゴールドストン・

*12) 超伝導の秩序変数は電子 2 個のクーパー対なので，$m_*=2m$, $e_*=2e$ である．

*13) 伝導率が発散するのは直流電場のときだけである．交流伝導率では，二流体論で言う常流動成分によって散逸が起き，抵抗が生じる．

*14) 磁場が変化すると，電磁誘導で試料表面に電流が生じ，電流による磁場が磁場変化を打ち消すからである．

*15) 超伝導状態が単連結の場合．多重連結の場合はゲージ変換ができず，その結果として起こる現象が以下で出てくる渦糸である．

ボゾンはあらわれない．一方，$e_*^2|\psi|^2 A_i^2/(2m_*)$ という項からゲージ場は有効質量をもつ（ヒッグス・メカニズム）．

超伝導体の特性長さ

ここまでの議論をまとめると，ゲージ場と秩序変数が有効質量をもっている．したがって，これらの有効質量に応じて，超伝導体には 2 種類の特性長さが存在することになる：

1. ゲージ場の有効質量による侵入長 λ：

$$\lambda^2 = \frac{m_*}{e_*^2|\psi|^2} = \frac{m_*}{e_*^2}\frac{b}{a} \, . \tag{12.51}$$

   このためゲージ場は λ 程度しか超伝導体内部に入られず，マイスナー効果が起きる．

2. 秩序変数の有効質量による相関長 ξ[*16)]：

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m_* a} \, . \tag{12.52}$$

   これは秩序変数の空間的変化のスケールをあらわす．

したがって，GL 理論は λ と ξ で定義した無次元量 κ で特徴づけられる（GL パラメータ）：

$$\kappa := \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m_*}{e_*\hbar}\sqrt{2b} \, . \tag{12.53}$$

κ の値に応じて，

- **第 I 種超伝導体**：$\kappa < 1/\sqrt{2}$ つまり $\xi > \sqrt{2}\lambda$
- **第 II 種超伝導体**：$\kappa > 1/\sqrt{2}$ つまり $\xi < \sqrt{2}\lambda$

と分類される．

第 II 種超伝導体では侵入長が相関長より長いので，全体として超伝導状態を保ちつつ，磁気侵入が起こる．磁気侵入は**渦糸**（ボーテックス）の生成という形で起こる．渦糸は，磁束量子 $\phi = h/e_*$ をもち量子化されている．磁場を次第に大きくしたとき，渦糸の生成が起こりはじめる磁場を下部臨界磁場 $B_{c1} = B_c$ と言い，超伝導状態が完全に壊れる磁場を上部臨界磁場 B_{c2} と言う．渦糸は格子を組み，GL 理論では三角格子がもっとも安定な配位である．これも GL 理論を使って導出できるが詳細は省く．

ロンドン方程式とその帰結

擬自由エネルギー $\mathcal{L}$ から，A_i の運動方程式は

---

*16)　超伝導では GL コヒーレンス長と呼ぶことが多いようである．

$$\partial_j F^{ij} = J^i \ , \tag{12.54}$$

$$J_i := -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = -\frac{i\hbar}{2m_*}e_*(\psi^* \partial_i \psi - \psi \partial_i \psi^*) - \frac{e_*^2}{m_*}|\psi|^2 A_i \ . \tag{12.55}$$

式 (12.55) から，ゲージ変換によって南部–ゴールドストン・ボゾン θ を消去したゲージでは

$$J_i = -\frac{e_*^2}{m_*}|\psi|^2 A_i = -\frac{1}{\lambda^2}A_i \tag{12.56}$$

が得られる．これを**ロンドン方程式**と言う．ロンドン方程式は応答関数の一種である*17)．

ロンドン方程式から，マイスナー効果および伝導率の発散が得られる．

1. マイスナー効果：$A_i = (0, A_y(x), 0)$ と選ぶと $F_{xy} = \partial_x A_y = B_z(x)$ である．マクスウェル方程式 (12.54) と組みあわせて

$$\partial_x F^{yx} = J^y \to -\partial_x^2 A_y = -\frac{1}{\lambda^2}A_y \ . \tag{12.57}$$

したがって，

$$B_z(x) = B_0 e^{-x/\lambda} \ . \tag{12.58}$$

すなわち，超伝導体表面から λ 程度の距離で磁場は減衰する．

2. 直流伝導率の発散：$E_i = i\omega A_i$ なので，ロンドン方程式から

$$J_i = \frac{i}{\omega}\frac{1}{\lambda^2}E_i(\omega, \boldsymbol{k} = 0) \ . \tag{12.59}$$

$\omega \to 0$ で伝導率が発散することがわかる（λ：有限の場合）．

*17)　一般的な応答関数と違い，ロンドン方程式は局所的な形をしているが，非局所的な形をピパード (Pippard) 方程式と言う．

第 13 章
AdS/CFT–相転移

一般の AdS/CFT では相転移を起こす系を考えることができる．本章では，1 次相転移や 2 次相転移を起こす代表的な例をとりあげる．

13.1　なぜ AdS/CFT で相転移を調べるのか

$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論はプラズマ相しかもたないが，本章では相転移を起こす理論とブラックホールを考える．想定する応用分野としては，

1. まず第一に，QGP と同様，QCD が挙げられる．QCD は豊かな相構造をもつと考えられており，相転移点や相転移にまつわる現象が活発に議論されている．また，実験も計画されている．このような相転移を理論的に理解するために，前章のような物性論的な道具立てで十分かもしれないが，AdS/CFT によって新たな知見がもたらされるかもしれない．
2. 一方，物性でもしばしば強相関系があらわれる（たとえば高温超伝導など）．近年，こういった系を AdS/CFT で理解できないかという多くの研究がされている．

2 点目の AdS/CFT を物性に応用する，と言う場合ただちに思いつく問題がある．AdS_5 時空はラージ N_c $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論に対応していた．これは QCD とは違う系だが，ヤン–ミルズ理論という点でそう遠いわけではない．しかし，そもそも物性での強相関系になにかラージ N_c ゲージ理論が関わっているかどうか，現時点でははっきりしない．

そこで，

- 一端実際の物性系との対応，場の理論との対応は保留にして
- とにかくラージ N_c ゲージ理論の枠内で物性論的に興味深い現象を実現する

ことを考えよう．

では，どのような現象に注目すべきだろう．AdS/CFT を使って変わった現

象がみえたからと言って，実際の物性系で起こらない現象ばかり考えてもあまり意味はないかもしれない．また，どういう現象がありうるかを挙げたらきりがない．そこで本書では，低エネルギー物理でのロバストな現象，たとえば超伝導や臨界現象をとりあげることにする．

13.2 1次相転移：ホーキング–ページ転移

1次相転移の一例として，7.3節で紹介した S^3 ホライズンをもつ AdS ブラックホールを考えよう：

$$ds_5^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}} + r^2 d\Omega_3^2 \ . \tag{13.1}$$

$r \to \infty$ で AdS 境界方向の計量は，

$$ds_4^2 \to \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + L^2 d\Omega_3^2) \tag{13.2}$$

なので，この場合対応するのは半径 L の S^3 上での $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論である．

ゲージ理論にスケール L を導入したことで，物理は劇的に変わる．$\mathbb{R}^3$ 上の $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の場合は，いつでもスケーリングで違う温度に移ることができ，どの温度も等価である．温度以外に次元をもった量がないからである．しかし，スケールを導入したため，スケーリングによって違う温度に移ることはできず，理論は無次元量 TL でパラメトライズされる．以下みるように，適当な TL でこのブラックホールは1次相転移を起こす*1)．これを**ホーキング–ページ転移**と言う [69]．

ホライズンの位置 $r = r_+$ は，

$$\frac{r_+^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r_+^2} = 0 \to r_0^4 = r_+^4 + L^2 r_+^2 \ . \tag{13.3}$$

温度は，

$$T = \frac{2r_+^2 + L^2}{2\pi r_+ L^2} \ . \tag{13.4}$$

ホライズン半径と温度の関係を示したのが，図13.1である．ある温度に対し，対応する r_+ は2種類あることがわかる．T の最小値は $r_+ = L/\sqrt{2}$ であり，このときの温度は $T_1 := \sqrt{2}/(\pi L)$ である．$r_+ < L/\sqrt{2}$ の解は「スモール・ブラックホール」と呼ばれる．この場合，ブラックホールが AdS スケール L より十分小さいため，宇宙項の存在にあまり左右されない．このため，ブラックホールの振るまいはシュワルツシルド解 (3.32) と似ている．実際 $r_+ \ll L$ のとき，

$$T \simeq \frac{1}{2\pi r_+} \tag{13.5}$$

*1) コンパクトな空間上でも相転移が起こるのは，ラージ N_c 極限のせいである．

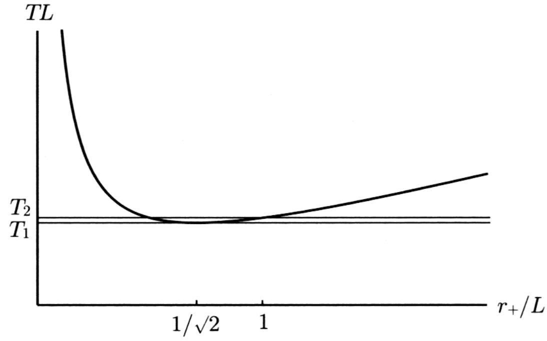


図 13.1 球対称なシュワルツシルド AdS_5 ブラックホールに対しての，ホライズン半径 r_+ と温度の関係．1 つの温度に対し，対応する r_+ は 2 種類ある．$T=T_1$ が最低温度で，$T=T_2$ でホーキング–ページ転移が起こる．

となり，これは 5 次元シュワルツシルド解に帰着する．

一方，$r_+ > L/\sqrt{2}$ の解は「ラージ・ブラックホール」と呼ばれる．このブラックホールの振るまいは，すでに議論したプラナー・ブラックホールと似ている．実際 $r_+ \gg L$ のとき，

$$T \simeq \frac{r_+}{\pi L^2} \tag{13.6}$$

となる．

さきにみたように，$T < T_1$ のときはブラックホール解は存在しない．したがって，この領域では “thermal AdS” 時空（AdS 時空でユークリッド時間の周期を β_0 としたもの）が解となる．

対応するゲージ理論では，これは閉じこめ／非閉じこめ転移に相当する*2)．すでにプラナー・ブラックホールでみたように，ブラックホールはエントロピーが $O(N_c^2)$ なので，非閉じこめのプラズマ相に相当する．一方，thermal AdS 時空はブラックホールではなく，エントロピーは $O(N_c^0)$ であり，これは閉じこめ相の振るまいである．

相転移の詳細をみてみよう．すでに議論したように，我々はブラックホールの分配関数を鞍点近似で評価してきた：

$$Z_{\text{ゲージ理論}} \simeq e^{-\underline{\mathcal{S}_{\mathrm{E}}}} . \tag{13.7}$$

（$\underline{\mathcal{S}_{\mathrm{E}}}$ は，古典解 g を代入した on-shell 作用をあらわす）．しかし，古典解はユニークとは限らない．たとえば鞍点が 2 つある場合，

$$Z_{\text{ゲージ理論}} \simeq e^{-\underline{\mathcal{S}_{\mathrm{E}}}} + e^{-\underline{\mathcal{S}_{\mathrm{E}}}'} \tag{13.8}$$

*2) これは閉じこめ／非閉じこめ転移の一例だが，QCD の閉じこめ／非閉じこめを説明したことにはならない．第一に，理論が違う（ここでは $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論である）．第二に，ホーキング–ページ転移はコンパクト空間上のラージ N_c ゲージ理論に起こる現象である．

とするのが自然である．$\underline{\mathcal{S}_{\rm E}}$, $\underline{\mathcal{S}_{\rm E}}'$ は，古典解 g, g' を使った on-shell 作用である．自由エネルギーの小さい解の方が主要な寄与をする．

そこで，SAdS_5 ブラックホールと thermal AdS_5 時空で自由エネルギーの差を評価する．これは 7.4 節での計算を球対称ホライズンの場合で繰り返すだけである．一般に，自由エネルギーを評価するには，バルク作用だけではなく，ギボンズ–ホーキング作用，相殺作用を評価しなければいけない．しかし，自由エネルギーの差だけを問題にするのであれば，バルク作用の評価だけで十分なことを確かめることができる．

このように，ブラックホールの自由エネルギーをブラックホールのない時空（**レファレンス時空**と言う）から引き算するという手法は，一般相対論でよく用いられており，平坦な時空のブラックホール（たとえばシュワルツシルド・ブラックホール）の自由エネルギーを求める際には，主にこの方法を使う．

式 (7.45) より，on-shell バルク作用は時空の体積に帰着した．これを SAdS_5 ブラックホールと thermal AdS_5 時空で評価すると，

$$\mathcal{S}_{\rm SAdS} = \frac{1}{2\pi G_5 L^2}\int_0^\beta dt \int d\Omega_3 \int_{r_+}^r dr\, r^3 = \frac{\beta\Omega_3}{8\pi G_5 L^2}(r^4 - r_+^4)\bigg|_{r=\infty}, \tag{13.9}$$

$$\mathcal{S}_{\rm AdS} = \frac{1}{2\pi G_5 L^2}\int_0^{\beta_0} dt \int d\Omega_3 \int_0^r dr\, r^3 = \frac{\beta_0\Omega_3}{8\pi G_5 L^2}r^4\bigg|_{r=\infty}. \tag{13.10}$$

thermal AdS_5 時空の温度については注意が必要である．ブラックホールの場合，計量が「円錐形」になるのを避けるという要請から温度が決まったが，thermal AdS_5 時空の周期 β_0 は任意のものをとれる．いま，自由エネルギーの差を考えるのだから，thermal AdS_5 時空の温度は SAdS_5 ブラックホールの温度にあわせるべきである．SAdS_5 ブラックホールの温度は T であるが，これは半径 r での「固有温度」とは違う（式 (6.69)）．あわせるべき温度は，この固有温度である．したがって，

$$\beta f^{1/2} = \beta_0(r) f_0^{1/2}\ . \tag{13.11}$$

（f, f_0 は，それぞれ SAdS ブラックホールと thermal AdS 時空の g_{00} 成分）．したがって，自由エネルギーの差は

$$\begin{aligned}
\Delta F \quad &:= \quad \frac{1}{\beta}(\mathcal{S}_{\rm SAdS} - \mathcal{S}_{\rm AdS}) &(13.12)\\
&= \quad \frac{\Omega_3}{8\pi G_5 L^2}\left\{ r^4 - r_+^4 - r^4\sqrt{\frac{\left(\frac{r}{L}\right)^2 + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}}{\left(\frac{r}{L}\right)^2 + 1}} \right\}\Bigg|_{r=\infty} &(13.13)\\
&\xrightarrow{r\to\infty} \quad \frac{\Omega_3}{8\pi G_5 L^2}\left\{ r^4 - r_+^4 - r^4\left(1 - \frac{r_0^4}{2r^4}\right)\right\} &(13.14)\\
&= \quad -\frac{\pi r_+^2}{8 G_5 L^2}(r_+^2 - L^2)\ . &(13.15)
\end{aligned}$$

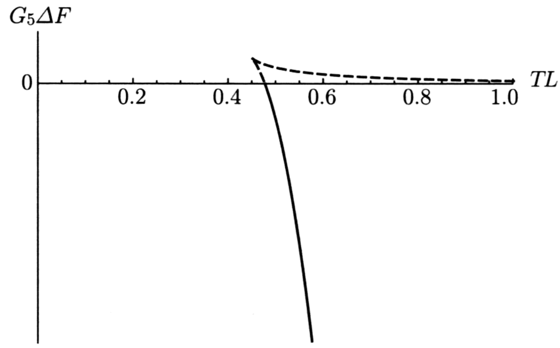


図 13.2 球対称なシュワルツシルド AdS_5 ブラックホールの自由エネルギー $\Delta F(T)$. $\Delta F > 0$ の領域は安定ではなく，$\Delta F = 0$ の thermal AdS_5 時空が選ばれるので，点線で示した.

したがって，$r_+ > L$ のとき（温度で $T > T_2 := 3/(2\pi L)$ のとき），$\Delta F < 0$ となる．スモール・ブラックホールはこの条件を満たさない．

図 13.2 は，$\Delta F(T)$ をプロットしたものである．これから以下のことがわかる：

- $T < T_1$ ：ブラックホールは存在しない．thermal AdS 時空が安定な状態である．
- $T_1 \leq T < T_2$ ：ブラックホールは存在しうるが，$\Delta F > 0$ なので，やはり thermal AdS 時空が安定な状態である．ブラックホールはホーキング放射により thermal AdS 時空へと崩壊する．
- $T \geq T_2$ ：ラージ・ブラックホールは $\Delta F < 0$ なので，thermal AdS 時空からラージ・ブラックホールへの不連続な変化が起きる．$T = T_2$ が転移温度である．

$T = T_2$ で，1 次微分であるエントロピー $S = -\partial_T \Delta F$ は不連続である（エントロピーをもつブラックホールができるから）．したがって，これは 1 次相転移である．12.1.2 節の 1 次相転移の例で考えると，$T_1 \leq T < T_2$ ではブラックホールは準安定状態に相当し，この準安定状態が擬自由エネルギーにできたことを意味する．しかし，ブラックホールは大域的安定状態ではないので，thermal AdS 時空に崩壊するのである．

ΔF を使って熱力学量を求めると，

$$S = -\partial_T \Delta F = \frac{\pi^2 r_+^3}{2G_5} = \frac{\Omega_3 r_+^3}{4G_5} \,, \tag{13.16a}$$

$$E = \Delta F + TS = \frac{3\pi r_+^2 (r_+^2 + L^2)}{8G_5 L^2} = \frac{3\pi r_0^4}{8G_5 L^2} \,, \tag{13.16b}$$

$$C = \frac{\pi^2}{2G_5} \frac{3r_+^3 (2r_+^2 + L^2)}{2r_+^2 - L^2} \,. \tag{13.16c}$$

なお，7.4 節と同じ方法で自由エネルギーそのものを求めると，

$$F_{\mathrm{SAdS}} = -\frac{\pi}{8G_5L^2}\left(r_+^4 - L^2r_+^2 - \frac{3}{4}L^4\right) \ . \tag{13.17}$$

ここから

$$S = \frac{\pi^2 r_+^3}{2G_5} \ , \quad E = \frac{3\pi r_0^4}{8G_5L^2} + \frac{3\pi L^2}{32G_5} \ . \tag{13.18}$$

エネルギーに定数項があることに注意．AdS/CFT 辞書より，$L^3/G_5 = 2N_c^2/\pi$ なので，この定数項は

$$E_0 = \frac{3N_c^2}{16L} \ . \tag{13.19}$$

E_0 は，境界理論の立場では**カシミア・エネルギー**として解釈できる*3) [70]．半径 L の $S^3 \times \mathbb{R}$ 上の自由場に対して，カシミア・エネルギーは

$$E_{\mathrm{Casmir}} = \frac{1}{960L}(4n_0 + 17n_{1/2} + 88n_1) \tag{13.20}$$

で与えられる [71]．ここで n_i は理論がもつ場の種類をあらわし，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論の場合は,

$$\text{実スカラー場の種類：} n_0 = 6(N_c^2 - 1) \ , \tag{13.21a}$$

$$\text{ワイル・フェルミオン場の種類：} n_{1/2} = 4(N_c^2 - 1) \ , \tag{13.21b}$$

$$\text{ベクトル場の種類：} n_1 = N_c^2 - 1 \ , \tag{13.21c}$$

となる．これを式 (13.20) に代入すると

$$E_{\mathrm{Casmir}} = \frac{3(N_c^2 - 1)}{16L} \ . \tag{13.22}$$

これはラージ N_c 極限で，式 (13.19) に一致する．

13.3 2 次相転移：ホログラフィック超伝導

ホログラフィック超伝導

次に 2 次相転移の場合を考えよう．まずは，2 次相転移を起こすブラックホールがなければ，話ははじまらない．そのようなブラックホールはあるのだろうか？ ここでは，プラナー・ホライズンをもつブラックホールに限って議論する：

- 重力の真空解：もっとも単純な系は重力の真空解，シュワルツシルド AdS ブラックホールである．このブラックホールは，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論に対応する．しかし，これまでにみたように $\mathcal{N}=4$ ゲージ理論はスケール不変であり，相転移を起こさない．

*3) カシミア・エネルギーとは，境界条件のある場の理論がもつゼロ点エネルギーのことである．

- アインシュタイン–マクスウェル系：次に単純な系は，荷電ブラックホールのライスナー–ノルドストリューム AdS ブラックホールである（10.3 節）．この場合は，温度以外に化学ポテンシャルがあるため，スケール不変ではない．しかし，この系も相転移を起こさない．特殊なスケール対称性があり，相転移を禁じているからである[72]．おそらく，これはノー・ヘア定理と関係しているものと思われる．この定理によると，ブラックホールは少数のパラメータ，質量，角運動量，電荷のみによる．これらの量を与えると，ブラックホール解はユニークである．しかし，相転移を起こすには，複数の鞍点が必要である．
- アインシュタイン–マクスウェル–スカラー系：したがって，さらに複雑な系が必要だが，一つ可能なことは，系にさらにスカラー場を加えることである．通常（漸近的平坦な場合）スカラーの存在はブラックホール解を変えない．ノー・ヘア定理のせいである．しかし，この定理は高次元時空，AdS 時空では必ずしも成立しない．したがって，スカラー場を入れることで,（スカラー場がゼロではない）ブラックホール解も得られるのである．

したがって，考えるべき系は，アインシュタイン–マクスウェル–スカラー系である．以下，このような系を使って，超伝導や臨界現象を議論する*4)．

同じ事情を場の理論の立場からも考えてみよう．AdS/CFT の枠内で超伝導を実現するには，どんな材料が必要だろうか：

- まず場の理論を使うので，$T^{\mu\nu}$ が存在するはずである．
- また超伝導に特徴的な現象として伝導率の発散が挙げられるので，それをみるために $U(1)$ カレント J^μ が必要である．
- さらに，超伝導は 2 次相転移に伴ってあらわれる現象だが，相転移の秩序変数は荷電スカラー・オペレーター $\langle\mathcal{O}\rangle$ である．$\langle\mathcal{O}\rangle$ は，超伝導のギンツブルグ–ランダウ理論での擬波動関数 ψ に相当する．

すると AdS/CFT 辞書 (10.2.1 節) から，バルクで必要な場を決めることができる．境界の $T^{\mu\nu}, J^\mu, \langle\mathcal{O}\rangle$ に対応して，それぞれ 計量 g_{MN}，マクスウェル場 A_M，複素スカラー場 Ψ が必要である．したがって，**ホログラフィック超伝導**の系として，さまざまなものが知られているが，典型的には以下のようなアイン

---

*4) まぎらわしいことに「重力崩壊の臨界現象」と呼ばれる別の現象がある（歴史的には，あちらの方が先だったので，こちらがとやかく言える筋合いではない）．これは，平坦な時空での微小ブラックホール生成に関わるもので，生成されたブラックホール質量と初期条件（ブラックホールを生成した場の振幅の大きさなど）がスケール則で結ばれているという議論である（チョプティック・スケーリング）．これも臨界現象の一種かもしれないが，温度という概念が関わっていないなど（ブラックホールの古典論の話である）この本であつかうような伝統的な臨界現象とは異なるように思える．また，チョプティック・スケーリングにともなう臨界指数には，当初ユニバーサリティが期待されたが，結局そうではないようである．もっとも，臨界現象のように「くりこみ群」を用いた解析が有効という意味では，臨界現象と共通点がある．

シュタイン–マクスウェル–複素スカラーの系を考える[73],[74]：

$$\mathcal{S} = \int d^{p+2}x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda - \frac{L^2}{4}F_{MN}^2 - |D_M\Psi|^2 - V(|\Psi|)\right] , \quad (13.23)$$

$$D_M := \nabla_M - iqA_M , \quad (13.24)$$

$$V(|\Psi|) = m^2|\Psi|^2 . \quad (13.25)$$

この系は式 (12.22) のギンツブルグ–ランダウ理論と似ているが，ギンツブルグ–ランダウ理論とは違い $O(|\Psi|^4)$ の非線形項がないことに注意．非線形項を入れた議論も可能だが，以下みるように**非線形項がなくても 2 次相転移を起こす**という点が一つの大きな特徴である．

この系の解としては，$\Psi = 0$ のライスナー–ノルドストリューム AdS ブラックホールがある（10.3 節）．これは常伝導相に対応する．しかし低温 $T < T_c$ では，この解は不安定となり，2 次相転移を起こす．その結果 $\Psi \neq 0$ のブラックホールに置きかわる．Ψ は相転移を特徴づけるので，Ψ に対応するオペレーター $\langle\mathcal{O}\rangle$ がたしかに場の理論側での秩序変数と解釈できる．

もっとも，この理論に対応する場の理論ははっきりしない．と言うのも，式 (13.23) は $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論と違い，5.4 節の議論を経由して求められたものではなく，むしろ超伝導を再現するために最低限必要な材料を集めてきたにすぎないからである．しかし，この低温相がある種の超伝導／超流動に対応しているというのが主張である．その根拠として，以下では伝導率の発散やエネルギーギャップの存在を議論する．

ただし，重力に物質場が複数結合したこのような系の解析は容易ではなく，低温相（超伝導相）での解析解は知られていない．したがって，しばしば数値計算や近似を使う．そのような近似の一種として，以下では「プローブ近似」を使う．物質場を $\Psi \to \Psi/q$, $A_M \to A_M/q$ と再定義し，

$$\mathcal{S} = \int d^{p+2}x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda + \frac{1}{q^2}\left\{-\frac{L^2}{4}F_{MN}^2 - |D_M\Psi|^2 - V(|\Psi|)\right\}\right] . \quad (13.26)$$

スカラー場の電荷 $q \to \infty$ とするのがプローブ近似である．作用をみればわかるように，この極限ではマクスウェル場およびスカラー場は重力と結合しない．物質場の影響が無視できるので，計量としてはこれまでと同じシュワルツシルド AdS 解 (7.1) で十分である（以下 $p = 3$ の場合を考える）．

ただし，シュワルツシルド AdS 解自体はスケール不変なので，そのままでは相転移は起こらない．温度とは違うスケールを導入する必要がある．そこで化学ポテンシャル μ を導入する．この計量の下での物質場の解としては，式 (10.27) の形のものがある：

$$A_0 = \mu(1 - u^2) , \quad A_i = 0, \quad \Psi = 0 . \quad (13.27)$$

3.3.2 節の計算と同じようにして，これが解であることを確かめることができ

る．そこで式 (7.1) と式 (13.27) を背景場として，Ψ, A_M の摂動方程式を解く．ただし，この場合でも一般に数値計算が必要である．

この系で相転移が起こる原因は，スカラー場の質量がマクスウェル場のせいで effective にタキオンになり，解が不安定になるためである．作用 (13.26) よりスカラー場の 2 次部分は

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 - A_0^2(-g^{00}) \simeq m^2 - \frac{1}{(\pi L)^2}\left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \frac{u^2(1-u^2)}{1+u^2} \ . \tag{13.28}$$

したがって，十分低温で Ψ はタキオンになる．

ホログラフィック超伝導の臨界現象

スカラー場の一般論にしたがって（10.2.2 節），$\langle\mathcal{O}\rangle$ は $u \to 0$ での振るまいから求めることができる：

$$\Psi \sim \Psi^{(0)} u^{\Delta_-} + c\langle\mathcal{O}\rangle u^{\Delta_+} \quad (u \to 0) \tag{13.29}$$

（c は適当な係数）．プローブ近似の下で，$\Psi(u)$ の方程式を数値的に解いたものが図 13.3(a) である．転移点 T_c 近傍では，

$$\langle\mathcal{O}\rangle \propto (T_c - T)^{1/2} \tag{13.30}$$

となる．これは 2 次相転移近傍でのギンツブルグ–ランダウ理論の振るまい $\beta = 1/2$ と一致する．

ホログラフィック超伝導が 12 章で議論した意味での臨界現象であり，本当にギンツブルグ–ランダウ理論であらわされるかどうかをチェックするには，ほかの臨界指数もみる必要がある．まず，プローブ近似では，時空はシュワルツシルド AdS ブラックホールのままなので，転移点近傍で時空に特異性は反映されない．したがって，比熱の指数 $\alpha = 0$ である．また，式 (13.29) から「秩序変数応答関数」

$$\chi_k = \frac{\partial\langle\mathcal{O}_k\rangle}{\partial\Psi_k^{(0)}} \tag{13.31}$$

を求めることができる．ここから指数 (γ, ν, η, z) を求めることができる．このように，ホログラフィック超伝導に対して一連の臨界指数が計算できて，その値はギンツブルグ–ランダウ理論 (12.35) と一致する [75]．

ギンツブルグ–ランダウ理論は平均場理論の一種だが，平均場理論に一致するのは，ラージ N_c 極限を考えているためである．この極限ではゆらぎが抑えられ，平均場の結果が厳密に成りたつ．ホログラフィック超伝導の臨界指数は，空間次元の数によらないことも確認されており，これも平均場理論の特徴である*5)．臨界指数の値がギンツブルグ–ランダウ理論に一致することは物性系としては自然だが，これは当たり前の結果ではない．

---

*5)　とくに境界理論が $(2+1)$ 次元でも相転移が起きるが，Coleman–Mermin–Wagner の定理に抵触するわけではない [65], [66]．

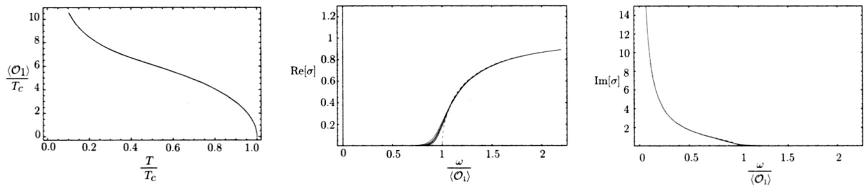


図 13.3 (a), (b), (c) はそれぞれホログラフィック超伝導に対する $\langle\mathcal{O}\rangle$, $\mathrm{Re}[\sigma(\omega)]$, $\mathrm{Im}[\sigma(\omega)]$ をあらわす（$d=3$ で，スカラー場 Ψ の質量 $m^2=-2/L^2$ の場合）.（文献 [74] より.）

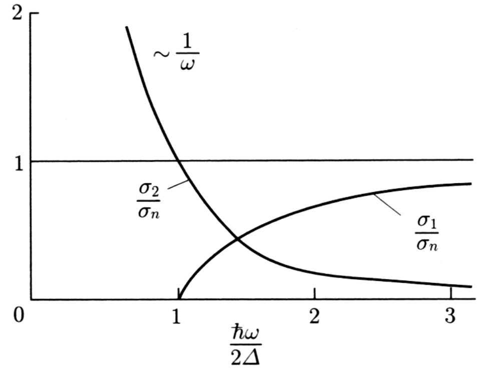


図 13.4 超伝導体での典型的な複素伝導率. σ_1 が実部，σ_2 が虚部をあらわす.（文献 [76] より.）

第一に，いま考えているのは，重力理論としてはブラックホールの 2 次相転移である．そもそも一般に重力の存在下では，熱平衡が存在しないため通常の統計力学は成立しない．たとえばシュワルツシルド・ブラックホールは負の比熱をもつ．一般に重力の存在下では通常の統計力学が成立しないので，ブラックホールに通常の臨界現象の理論が成立するかは必ずしも自明ではない.（もちろん，AdS/CFT は重力理論と場の理論が等価であることを主張するので，通常の臨界現象の理論が成立するはずである.）

第二に，この場合は臨界指数の値としてギンツブルグ–ランダウ理論の値が出てきたが，いつでもそうなるわけではない．違う系を考えると，平均場の臨界指数であっても通常議論されないような値の指数が出てくる．これは，式 (12.22) とは違ってきわめて変わった平均場の自由エネルギーをもつ系と考えられる．この意味で，AdS/CFT での 2 次相転移は平均場理論の枠内でさえ，通常の臨界現象より豊かな内容をもつようであり，興味深い．

ホログラフィック超伝導の伝導率

今度はマクスウェル場 $A_x \propto e^{-i\omega t}$ を解く．10.2.2 節の方法で，このモデルでの伝導率 $\sigma(\omega)$ が計算でき，通常の超伝導体と同様の 2 つの振るまいがみられる（図 13.3, 13.4）：

1. 直流伝導率 $\mathrm{Re}[\sigma(\omega \to 0)]$ の発散．この振るまいは $\mathrm{Im}[\sigma(\omega)]$ から確認できる．σ の実部と虚部の間には，クラマース–クローニッヒの関係式が成りたつからである：

$$\mathrm{Im}[\sigma(\omega)] = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[\sigma(\omega')]d\omega'}{\omega' - \omega} \tag{13.32}$$

（$\mathcal{P}$ は主値をあらわす）．この式より，$\mathrm{Re}[\sigma]$ のデルタ関数的振るまいは $\mathrm{Im}[\sigma]$ の $1/\omega$ のポールとして反映される．

2. 交流伝導率 $\mathrm{Re}[\sigma(\omega)]$ は周波数 $\omega < \omega_g$ でほぼゼロになり，電磁波吸収が起こらない．

磁場に対する応答

超伝導では磁場に対する応答も興味深い（12.2 節）．とくにマイスナー効果によって磁気侵入が妨げられる．ホログラフィック超伝導の場合，境界理論にゲージ場 $A_\mu^{(0)}$ が存在するものの，これはあくまで外場である．境界理論にはダイナミカルなゲージ場は存在しないため，マイスナー効果は起こらない．したがって，ホログラフィック超伝導では磁気侵入は妨げられない．マイスナー効果の議論では，ロンドン方程式 (12.56) とマクスウェル方程式を組み合わせることで，ゲージ場が有効質量をもつことを示した．しかし，いまの場合境界理論のゲージ場には，マクスウェル方程式は存在しない．このモデルでマイスナー効果が起こらないのは，このためである．

もっとも，超伝導と言うのなら，ロンドン方程式は成立しているはずである．ロンドン方程式は外場に対するカレントの応答を示しているので，ゲージ場がダイナミカルかどうかには無関係である．ホログラフィック超伝導は，ロンドン方程式を満たしていることは確かめられる*6)．

また，超伝導体は磁場への応答の違いによって，第 I 種と第 II 種に分けられる．第 II 種超伝導では，全体として超伝導状態を保ちつつ磁気侵入が起こる．ホログラフィック超伝導の場合，磁気侵入は妨げられないので，磁気侵入長の長い「極端な第 II 種超伝導体」*7) に相当する．磁気侵入は渦糸の生成という形で起こるが，このモデルで渦糸や渦糸格子も構成されている．渦糸格子の場合，ギンツブルグ–ランダウ理論同様，三角格子がもっとも安定な配位である．

ホログラフィック超伝導ではダイナミカルなゲージ場がないという事情から，このモデルは超伝導というより，むしろ超流動と考えることもできる．このモデルで，超流動としての性質も調べられている．

---

*6) 場の理論の立場では，ゲージ場がダイナミカルかどうかには関わらず，ゲージ対称性の自発的破れからただちにロンドン方程式が導かれる [77]．

*7) 超流動もしばしばそう呼ばれる．

ホログラフィック超伝導の問題点

ホログラフィック超伝導として特定のモデル (13.23) を使ってきたが，このような現象は特定のモデルにはよらない．そもそもプローブ近似，シュワルツシルド AdS ブラックホールでも相転移がみられるということは，ホログラフィック超伝導では物質場の不安定性こそがカギであることを示唆する．重力場は，背景場を提供するといった比較的マイナーな役割しか果たさないように思える．したがって，式 (13.28) のような議論が成りたつ幅広いモデルで同様の現象がみられるはずである*8)．つまり，ホログラフィック超伝導はロバストな現象である．超伝導自体，低温での典型的な振るまいなので，これは自然であろう．

ホログラフィック超伝導の問題点の一つは，秩序変数 $\langle \mathcal{O} \rangle$ の微視的描像に欠けている点である．ホログラフィック超伝導は，重力理論から出発しているので，境界理論が不明である．このため，$\mathcal{O}$ がどのようなオペレーターなのか，BCS 理論のようにコンポジット・オペレーターかどうかさえ明らかではない．これは，ギンツブルグ–ランダウ理論とも共通した事情である．つまり，ホログラフィック超伝導は，BCS 理論のホログラフィック版というより，ギンツブルグ–ランダウ理論のホログラフィック版である．

さて，高温超伝導はその発見より四半世紀が経つが，いまだに理論的な理解は十分ではない．高温超伝導の特徴の一つはその豊かな相図である．超伝導相だけではなく，フェルミ流体相，非フェルミ流体相，擬ギャップ相，モット絶縁体相などの存在が知られている．これらの相はおそらく密接に関わっており，高温超伝導の解決にはその統一的な理解が必要となる可能性が高い．とくに，高温超伝導を理解するうえでカギになると考えられているのが，モット絶縁体相である．

したがって，AdS/CFT の立場で高温超伝導の問題に迫るには，超伝導相を実現するだけでは明らかに不十分である．とは言え，AdS/CFT で一度にこれらの相を理解するのは容易とは思われず，まず各相を個別に理解するのが妥当であろう．このため，AdS/CFT で各相が個別に調べられている．

上で述べたように，ホログラフィック超伝導はギンツブルグ–ランダウ理論に相当する．しかし，バルク理論として，スカラー場のかわりにフェルミオン場を考えると，クーパー不安定性を起こすことができる．また，バルク場としてフェルミオン場を考えると，フェルミ流体相，および非フェルミ流体相を実現できることがわかっている[78]．将来的に，これら各相をカバーした重力理論ができれば，高温超伝導の理論的な解明に役立つかもしれない．

---

*8)　逆に言えば，重力理論の新しい現象としてどれだけ興味深いのか疑問は残る．

参考文献

[1] `http://www.slac.stanford.edu/spires/topcites/`

[2] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [hep-th/9711200].

[3] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, 1973). ［邦訳：『重力理論』（丸善，2011）］.

[4] R. M. Wald, *Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics* (The Univ. of Chicago Press, 1994).

[5] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, "Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity", *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2752.

[6] W. H. Zurek and K. S. Thorne, "Statistical Mechanical Origin Of The Entropy Of A Rotating, Charged Black Hole", *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2171.

[7] レビューとしては，たとえば
夏梅誠,「超弦理論はブラックホールの謎を解けるか？」日本物理学会誌，1999 年 3 月号.

[8] T. Hatsuda, "Bulk and spectral observables in lattice QCD", arXiv:hep-ph/0702293.

[9] K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, *Quark-Gluon Plasma: From Big Bang To Little Bang* (Cambridge Univ. Press, 2005).

[10] `http://www.bnl.gov/bnlweb/pubaf/pr/PR_display.asp?prID=05-38`

[11] G. 't Hooft, "A Planar Diagram Theory for Strong Interactions", *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461.

[12] S. Donnachie, H. G. Dosch, O. Nachtmann and P. Landshoff, *Pomeron physics and QCD* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002).

[13] G. F. Chew and S. C. Frautschi, "Regge Trajectories And The Principle Of Maximum Strength For Strong Interactions", *Phys. Rev. Lett.* **8** (1962) 41.

[14] J. Polchinski, "Scale and conformal invariance in quantum field theory", *Nucl. Phys.* **B303** (1988) 226.

[15] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory", *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105 [hep-th/9802109].

[16] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [hep-th/9802150].

[17] T. Sakai and S. Sugimoto, "Low energy hadron physics in holographic QCD", *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005) 843 [hep-th/0412141].

[18] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of spacetime* (Cambridge Univ. Press, 1973).

[19] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. W. Peet, "Entropy and temperature of black 3-branes", *Phys. Rev.* **D54** (1996) 3915 [hep-th/9602135].

[20] J. K. Erickson, G. W. Semenoff and K. Zarembo, "Wilson loops in N=4 supersymmetric Yang-Mills theory", *Nucl. Phys.* **B582** (2000) 155 [hep-th/0003055].

[21] N. Drukker and D. J. Gross, "An Exact prediction of N=4 SUSYM theory for string theory", *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2896 [hep-th/0010274].

[22] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, "Supergravity and a confining gauge theory: Duality cascades and χSB-resolution of naked singularities", *JHEP* **0008** (2000) 052 [hep-th/0007191].

[23] J. Polchinski and M. J. Strassler, "The string dual of a confining four-dimensional gauge theory", hep-th/0003136.

[24] T. Matsui and H. Satz, "J/Ψ Suppression by Quark-Gluon Plasma Formation", *Phys. Lett.* **B178** (1986) 416.

[25] H. Liu, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, "Calculating the jet quenching parameter from AdS/CFT", *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 182301 [hep-ph/0605178].

[26] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe, "Energy loss of a heavy quark moving through N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma", *JHEP* **0607** (2006) 013 [hep-th/0605158].

[27] J. Casalderrey-Solana and D. Teaney, "Heavy quark diffusion in strongly coupled N=4 Yang-Mills", *Phys. Rev.* **D74** (2006) 085012 [hep-ph/0605199].

[28] S. S. Gubser, "Drag force in AdS/CFT", *Phys. Rev.* **D74** (2006) 126005 [hep-th/0605182].

[29] キャレン,『熱力学および統計物理入門（上）』（吉岡書店，1998）.

[30] 清水明,『熱力学の基礎』（東京大学出版会，2007）.

[31] L. D. Landau and E. M. Lifshytz, *Fluid mechanics, second edition* (Elsevier, 1987).

[32] D. T. Son and A. O. Starinets, "Minkowski-space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications", *JHEP* **0209** (2002) 042 [arXiv:hep-th/0205051].

[33] I. R. Klebanov and E. Witten, "AdS/CFT correspondence and symmetry breaking", *Nucl. Phys.* **B556** (1999) 89 [arXiv:hep-th/9905104].

[34] C. P. Herzog and D. T. Son, "Schwinger-Keldysh propagators from AdS/CFT correspondence", *JHEP* **0303** (2003) 046 [arXiv:hep-th/0212072].

[35] K. Skenderis and B. C. van Rees, "Real-time gauge/gravity duality", *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 081601 [arXiv:0805.0150 [hep-th]].

[36] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, "N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals", *JHEP* **0810** (2008) 091 [arXiv:0806.1218 [hep-th]].

[37] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, "From weak to strong coupling in ABJM theory", *Commun. Math. Phys.* **306** (2011) 511 [arXiv:1007.3837 [hep-th]].

[38] S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, "Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points", *Phys.*

Rev. **D78** (2008) 106005 [arXiv:0808.1725 [hep-th]].

[39] `http://webbook.nist.gov`

[40] M. Natsuume and M. Ohta, "The shear viscosity of holographic superfluids", *Prog. Theor. Phys.* **124** (2010) 931 [arXiv:1008.4142 [hep-th]].

[41] これらの仕事についての原論文については,
M. Natsuume, "String theory and quark-gluon plasma", arXiv:hep-ph/0701201 の文献リストを参照.

[42] P. Benincasa, A. Buchel and R. Naryshkin, "The shear viscosity of gauge theory plasma with chemical potentials", *Phys. Lett.* **B645** (2007) 309 [arXiv:hep-th/0610145].

[43] P. Romatschke and U. Romatschke, "Viscosity Information from Relativistic Nuclear Collisions: How Perfect is the Fluid Observed at RHIC?", *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 172301 [arXiv:0706.1522 [nucl-th]].

[44] H. B. Meyer, "A calculation of the shear viscosity in SU(3) gluodynamics", *Phys. Rev.* **D76** (2007) 101701 [arXiv:0704.1801 [hep-lat]].

[45] A. Nakamura and S. Sakai, "Transport coefficients of gluon plasma", *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 072305 [arXiv:hep-lat/0406009].

[46] F. Karsch, "Properties of the quark gluon plasma: A lattice perspective", *Nucl. Phys.* **A783** (2007) 13 [arXiv:hep-ph/0610024].

[47] A. Bazavov, *et al.*, "Equation of state and QCD transition at finite temperature", *Phys. Rev.* **D80** (2009) 014504 [arXiv:0903.4379 [hep-lat]].

[48] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics", *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601 [arXiv:hep-th/0405231].

[49] I. Müller, "Zum Paradoxon der Wärmeleitungstheorie", *Z. Phys.* **198** (1967) 329.

[50] W. Israel, "Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory", *Annals Phys.* **100** (1976) 310.

[51] W. Israel and J. M. Stewart, "Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory", *Annals Phys.* **118** (1979) 341.

[52] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, "Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography", *JHEP* **0804** (2008) 100 [arXiv:0712.2451 [hep-th]].

[53] M. Natsuume and T. Okamura, "Causal hydrodynamics of gauge theory plasmas from AdS/CFT duality", *Phys. Rev.* **D77** (2008) 066014 [arXiv:0712.2916 [hep-th]].

[54] W. A. Hiscock and L. Lindblom, "Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories", *Phys. Rev.* **D31** (1985) 725.

[55] W. A. Hiscock and L. Lindblom, "Linear plane waves in dissipative relativistic fluids", *Phys. Rev.* **D35** (1987) 3723.

[56] A. Buchel, J. T. Liu and A. O. Starinets, "Coupling constant dependence of the shear

viscosity in N=4 supersymmetric Yang-Mills theory", *Nucl. Phys.* **B707** (2005) 56 [hep-th/0406264].

[57] A. Buchel, "Resolving disagreement for η/s in a CFT plasma at finite coupling", *Nucl. Phys.* **B803** (2008) 166 [arXiv:0805.2683 [hep-th]].

[58] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker and S. Yaida, "Viscosity Bound Violation in Higher Derivative Gravity", *Phys. Rev.* **D77** (2008) 126006 [arXiv:0712.0805 [hep-th]].

[59] P. Kovtun and L. G. Yaffe, "Hydrodynamic fluctuations, long-time tails, and supersymmetry", *Phys. Rev.* **D68** (2003) 025007 [arXiv:hep-th/0303010].

[60] S. Caron-Huot and O. Saremi, "Hydrodynamic Long-Time tails From Anti de Sitter Space", *JHEP* **1011** (2010) 013 [arXiv:0909.4525 [hep-th]].

[61] D. Anninos, S. A. Hartnoll and N. Iqbal, "Holography and the Coleman-Mermin-Wagner theorem", *Phys. Rev.* **D82** (2010) 066008 [arXiv:1005.1973 [hep-th]].

[62] M. Natsuume and T. Okamura, "Dynamic universality class of large-N gauge theories", *Phys. Rev.* **D83** (2011) 046008 [arXiv:1012.0575 [hep-th]].

[63] 西森秀稔,『相転移・臨界現象の統計物理学』(培風館, 2005).

[64] J. Cardy, *Scaling and renormalization in statistical physics* (Cambridge Univ. Press, 1996).

[65] S. R. Coleman, "There are no Goldstone bosons in two-dimensions", *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 259.

[66] N. D. Mermin and H. Wagner, "Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-dimensional or two-dimensional isotropic Heisenberg models", *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 1133.

[67] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, "Theory of dynamic critical phenomena", *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977) 435.

[68] K. Maeda, M. Natsuume and T. Okamura, "Dynamic critical phenomena in the AdS/CFT duality", *Phys. Rev.* **D78** (2008) 106007 [arXiv:0809.4074 [hep-th]].

[69] S. W. Hawking and D. N. Page, "Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space", *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 577.

[70] V. Balasubramanian and P. Kraus, "A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity", *Commun. Math. Phys.* **208** (1999) 413 [hep-th/9902121].

[71] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge Univ. Press, 1982).

[72] S. S. Gubser and A. Nellore, "Ground states of holographic superconductors", *Phys. Rev.* **D80** (2009) 105007 [arXiv:0908.1972 [hep-th]].

[73] S. S. Gubser, "Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon", *Phys. Rev.* **D78** (2008) 065034 [arXiv:0801.2977 [hep-th]].

[74] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, "Building a Holographic Superconductor", *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 031601 [arXiv:0803.3295 [hep-th]].

[75] K. Maeda, M. Natsuume and T. Okamura, "Universality class of holographic superconductors", *Phys. Rev.* **D79** (2009) 126004 [arXiv:0904.1914 [hep-th]].

[76] ティンカム,『超伝導入門』第 2 版（吉岡書店，2004）.

[77] S. Weinberg, "Superconductivity For Particular Theorists", *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **86** (1986) 43.

[78] レビューとしては，たとえば

T. Faulkner, N. Iqbal, H. Liu, J. McGreevy and D. Vegh, "From Black Holes to Strange Metals", arXiv:1003.1728 [hep-th].

索　引

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

欧字

著者略歴

夏梅 誠
なつうめ まこと

1967 年生
1989 年　北海道大学理学部物理学科卒業
1994 年　テキサス大学オースチン校物理学科博士課程修了，Ph.D. 取得
1995 年　日本学術振興会特別研究員
1998 年　高エネルギー加速器研究機構 助手
現　在　高エネルギー加速器研究機構 研究機関講師，
　　　　総合研究大学院大学併任
専　門　素粒子理論，主な研究分野は超弦理論
主要著書
『超ひも理論への招待』（日経 BP 社，2008）
『よくわかる量子力学』（ナツメ社，2005，共著）
『アインシュタインと 21 世紀の物理学』（日本評論社，2005，共著）
『現代物理最前線 7』（共立出版，2002，共著）

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-93
『**超弦理論の応用**　物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方』

著　者　夏梅　誠

2012 年 9 月 25 日　初版発行

数　理　科　学　編　集　部　　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．　　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社　サ　イ　エ　ン　ス　社　　TEL.(03)5474-8500(代表)
〒151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474-8600(広告部)

組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤　眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博